Q1. Seja $T : M_4(\mathbb{R}) \to M_4(\mathbb{R})$ um operador linear e considere as seguintes afirmações:

(I) T é diagonalizável se, e somente se, a soma das dimensões dos auto-espaços de T é igual a 16;

(II) se A é a matriz que representa T com respeito a alguma base de $M_4(\mathbb{R})$, então $\det(2A) = 16\det(A)$;

(III) se T é diagonalizável e 4, -4, 16 e -16 pertencem ao conjunto dos autovalores de T, então a matriz que representa T com respeito a qualquer base de $M_4(\mathbb{R})$ é inversível.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;

~~(c)~~ apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

(I) $\dim M_4(\mathbb{R}) = 16$ $\therefore$ (I) é verdadeira

(II) $\det(2A) = 2^{16}\det(A)$, pois $A \in M_{16}(\mathbb{R})$

$\therefore$ (II) é falsa

(III) 0 pode ser autovalor de T

$\therefore$ (III) é falsa

Q2. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz

$$T(1,1,0) = (1,a,b), \quad T(1,-1,0) = (2,4,c) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (3,5,6)$$

for simétrico, então $a + b + c$ é igual a:

(a) $10\sqrt{2}$;

(b) 8;

(c) 10;

(d) $2 + 8\sqrt{2}$;

~~(e)~~ 1.

$$B = \left\{ \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1) \right\}$$

é base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e

$$T\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} T(1,1,0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,a,b) =$$

$$= \left(\tfrac{1+a}{2}\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \left(\tfrac{1-a}{2}\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \tfrac{b}{\sqrt{2}}(0,0,1)$$

$$T\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} T(1,-1,0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2,4,c) =$$

$$= 3\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + (-1)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \tfrac{c}{\sqrt{2}}(0,0,1)$$

$$T(0,0,1) = (3,5,6) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + (-\sqrt{2})\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + 6(0,0,1),$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{1+a}{2} & 3 & 4\sqrt{2} \\ \frac{1-a}{2} & -1 & -\sqrt{2} \\ \frac{b}{\sqrt{2}} & \frac{c}{\sqrt{2}} & 6 \end{bmatrix}$$

logo, T é simétrico $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-a}{2} = 3 \\ \frac{b}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \\ \frac{c}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow a = -5,\ b = 8,\ c = -2$

Q3. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e as bases

$$\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,-1),(0,2)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [U]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

então:

(a) T é simétrico e U não é simétrico;

(b) T e U são ambos simétricos e têm polinômios característicos diferentes;

(c) T não é simétrico e U é simétrico;

(d) T e U são ambos simétricos e têm o mesmo polinômio característico;

(e) nem T nem U são simétricos.

Q4. Denote por I o operador identidade de $\mathbb{R}^4$ e seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que:

$$\operatorname{Ker}(T) = [(1,2,0,0),(0,-1,0,1)], \quad \operatorname{Ker}(T-2\mathrm{I}) = [(0,0,0,1)] \quad \text{e}$$
$$\operatorname{Ker}(T-3\mathrm{I}) = [(1,0,1,1)].$$

Temos que $T(2,1,2,0)$ é igual a:

(a) $(-3,0,-3,-3)$;

(b) $(1,3,0,-1)$;

(c) $(6,0,6,4)$;

(d) $(0,-1,-1,2)$;

(e) $(2,0,2,1)$.

$T(1,0) = 4(1,-1) + (-3)(0,2) = (4,-10)$

$T(1,1) = (-3)(1,-1) + 4(0,2) = (-3,11)$

$\Rightarrow T(0,1) = T(1,1) - T(1,0) = (-3,11) - (4,-10) =$
$= (-7,21)$

$\therefore [T]_{\underline{can}} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -10 & 21 \end{bmatrix}$, que não é simétrica.

Como $\underline{can}$ é ortonormal, segue que T não é simétrico.

Analogamente, $[U]_{\underline{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore$ U é simétrico.

$B = \{(1,2,0,0), (0,-1,0,1), (0,0,0,1), (1,0,1,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^4$ e

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

$$[(2,1,2,0)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad [T(2,1,2,0)]_B = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow T(2,1,2,0) = (-2)(0,0,0,1) + 6(1,0,1,1) = (6,0,6,4)$

Q5. Sejam $n \geq 4$ um inteiro, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear e $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Denote por I o operador identidade de $\mathbb{R}^n$ e considere as seguintes afirmações:

(I) se alguma coluna de A é uma combinação linear das outras colunas de A, então T não é sobrejetor;

(II) se alguma linha de A é uma combinação linear das outras linhas de A, então 0 é um autovalor de T;

(III) se $\mathrm{Ker}(T)$ tem dimensão 2, então não existe um autovalor λ de T tal que $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{I})$ tenha dimensão $n - 1$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

(I) $\mathrm{Im}\,T = [v_1, \dots, v_n]$, onde $[v_i]_{\mathcal{B}}$ = i-ésima coluna de A

Se alguma coluna de A é combinação linear das demais, $\dim(\mathrm{Im}\,T) < n$ $\therefore$ (I) é verdadeira.

(II) Se alguma linha de A é combinação linear das demais, $\det A = 0 \Rightarrow 0$ é autovalor de T $\therefore$ (II) é verdadeira

(III) Se tal λ existisse, como $n \geq 4$, teríamos $\lambda \neq 0$ e $n = \dim \mathbb{R}^n \geq \dim \mathrm{Ker}\,T + \dim \mathrm{Ker}(T - \lambda I) = 2 + n - 1$. Impossível $\therefore$ (III) é verdadeira

Q6. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = -t^3(t-2)^2$. Denote por I o operador identidade de V. Temos que T é diagonalizável se, e somente se:

(a) $\dim(\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})) = 2$;
(b) $\dim(\mathrm{Im}(T)) - \dim(\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})) = 0$;
(c) $\dim(\mathrm{Im}(T - 2\mathrm{I})) - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$;
(d) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$;
(e) $\dim(\mathrm{Im}(T - 2\mathrm{I})) + \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 5$.

T é diagonalizável $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 5 = \dim \mathrm{Ker}\,T + \dim \mathrm{Ker}(T - 2I) =$$
$$= (5 - \dim \mathrm{Im}\,T) + \dim \mathrm{Ker}(T - 2I)$$
$$\Longleftrightarrow \dim \mathrm{Im}\,T - \dim \mathrm{Ker}(T - 2I) = 0$$

Q7. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, t+t^2, t^2, t^2+t^3\}$$

dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $P_3(\mathbb{R})$, respectivamente. Se $T : \mathbb{R}^2 \to P_3(\mathbb{R})$ é a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

então $T(0,1)$ é igual a:

(a) $3 + t - t^2 - 3t^3$;
(b) $3 + t - 3t^2 - 3t^3$;
(c) $-3 - t + t^2 + 3t^3$;
(d) $-3 - t + 3t^2 + 3t^3$;
(e) $t + 2t^2 + 3t^3$.

$[T(0,1)]_C = [T]_{BC} \cdot [(0,1)]_B =$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\therefore T(0,1) = 3\cdot 1 + 1(t+t^2) + (-1)t^2 + (-3)(t^2+t^3)$

$= 3 + t - 3t^2 - 3t^3$

Q8. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T : V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) se o operador T é simétrico, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, para qualquer base $\mathcal{B}$ de V;
(II) se existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T, então o operador T é simétrico;
(III) se $\langle T(v), w \rangle = \langle v, w \rangle$, para todos $v, w \in V$, então o operador T é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

(I) é falsa: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (y, 2y)$ não é simétrico, pois

$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não é simétrica, mas

$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, onde $B = \{(1,1),(0,1)\}$

(II) é verdadeira: seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V formada por autovetores de T. Então $C = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ é uma base ortonormal de V e $[T]_C$ é simétrica, porque é diagonal.

(III) é verdadeira: para todos $v, w \in V$, tem-se

$\langle T(v), w \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle = \langle T(w), v \rangle = \langle v, T(w) \rangle$

Q9. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(3,2),(2,1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Se λ e μ denotam os dois autovalores de T, então $\lambda + \mu$ é igual a:

(a) 4;
(b) -4;
(c) -8;
(d) 0;
(e) 8.

$$[T]_B = [I]_{CB} \cdot [T]_{BC} = \begin{bmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -7 & -13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \therefore p_T(t) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 3 \\ -1 & -2-t \end{bmatrix}$$

$$= (2-t)(-2-t) + 3$$

$$= t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$$

Q10. Sejam $A_1, A_2 \in M_5(\mathbb{R})$ e considere as seguintes afirmações:

(I) se A_1 e A_2 são semelhantes, então qualquer autovalor de A_1 também é um autovalor de A_2;

(II) se $T_1 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ e $T_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ são operadores lineares, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^5$, $[T_1]_{\mathcal{B}} = A_1$, $[T_2]_{\mathcal{B}} = A_2$ e se as matrizes A_1 e A_2 são semelhantes, então qualquer autovetor de T_1 também é um autovetor de T_2;

(III) se A_1 e A_2 possuem exatamente os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades algébricas, então A_1 e A_2 são semelhantes.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

(I) é verdadeira: A_1 e A_2 semelhantes $\Rightarrow p_{A_1}(t) = p_{A_2}(t)$

(II) é falsa:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} = A_2 \quad \text{e}$$

$(0,1,0,0,0)$ é autovetor de A_1, mas não de A_2

(III) é falsa:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \text{matriz nula}$$

têm $p_{A_1}(t) = -t^5 = p_{A_2}(t)$, mas $A_1 \not\sim A_2$, pois A_1 não é diagonalizável e A_2 é.

Q11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear e denote por $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$. Suponha que $\mathrm{Ker}(T-\mathrm{I}) = [(2,4,0)]$, $\mathrm{Ker}(T-2\mathrm{I}) = [(0,1,-1)]$ e $(1,0,1) \in \mathrm{Ker}(T+\mathrm{I})$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa correta:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

~~(c)~~ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$;

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

$B = \{(0,1,-1), (1,2,0), (1,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$

e $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Como $M\,[T]_B = [T]_{\underline{can}}\,M$,

onde $M = [I]_{B,\underline{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

$A = [T]_{\underline{can}}$, segue: $A = M\,[T]_B\,M^{-1}$.

Q12. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que a inversa da matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

é

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

então a soma das duas entradas na primeira linha da matriz A^{79} é igual a:

(a) $\frac{1}{6}(1 - 2 \cdot 2^{-79})$;

(b) $\frac{1}{6}(1 + 5 \cdot 2^{-79})$;

(c) $\frac{1}{6}(5 + 5 \cdot 2^{-79})$;

(d) $\frac{1}{6}(1 - 2^{-79})$;

(e) $\frac{1}{6}(5 - 2^{-79})$.

$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (1,2)$ é autovetor de A assoc a 1

$A\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (1,-4)$ é autovetor de A assoc a $-\frac{1}{2}$

Logo, $A = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}P^{-1} \Rightarrow A^{79} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^{79} \end{bmatrix}P^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot 2^{-79} & \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot 2^{-79} \\ \frac{4}{3} + 4\cdot 2^{-79} & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot 2^{-79} \end{bmatrix}$$

Q13. Seja $T : M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = t^3(t-1)^2(t+1)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(\operatorname{Im}(T)) \in \{3, 4, 5\}$;

(II) T é diagonalizável se, e somente se, existem cinco vetores distintos e linearmente independentes $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = v_2$ e $v_3, v_4, v_5 \in \operatorname{Ker}(T)$;

(III) se $A \in M_6(\mathbb{R})$ é uma matriz cujo polinômio característico é igual ao polinômio característico de T, então existe uma base $\mathcal{B}$ de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = A$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

(I) é verdadeira: Como 0 é autovalor de mult 3,

$1 \leq \dim \operatorname{Ker} T \leq 3 \Rightarrow 3 \leq \dim \operatorname{Im} T \leq 5$

(II) T é diagonalizável $\iff \dim \operatorname{Ker} T = 3$ e $\dim \operatorname{Ker}(T - I) = 2$

$\therefore$ (II) é verdadeira

(III) é falsa: se $[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 0 &&&&& \\ & 0 &&&& \\ && 0 &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& -1 \end{bmatrix}$,

então $p_T(t) = t^3(t-1)^2(t+1) = p_A(t)$, mas não existe base $\mathcal{B}$ de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = A$, porque T não é diagonalizável

Q14. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 24 e $T : V \to V$ um operador linear. Denote por I o operador identidade de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) se 1 é um autovalor de T, então a dimensão de $\operatorname{Im}(T - \mathrm{I})$ é menor ou igual a 23;

(II) T tem pelo menos um autovalor;

(III) T tem no máximo 24 autovalores.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

(I) é verdadeira: 1 autovalor de $T \Rightarrow \dim ~~Ker~~ (T - I) \geq 1$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(T - I) \leq 24 - 1 = 23$

(II) é falsa: se $[T]_B = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} &&& \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} && \\ && \ddots & \\ &&& \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$, para alguma base

B de V, então $p_T(t) = (t^2+1)^{12}$, que não tem raízes reais.

(III) é verdadeira: os autovalores de T são as raízes reais de $p_T(t)$ que tem grau 24.

Q15. Sejam n um inteiro positivo, V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes condições:

(I) T é inversível;

(II) T tem n autovalores não nulos distintos;

(III) T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) (I) implica (II) e (III) implica (II);

(b) (II) implica (III) e (III) implica (I);

(c) (I) implica (II) e (III) implica (I);

(d) (II) implica (I) e (III) implica (I);

(e) (II) implica (I) e (II) implica (III).

Q16. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por

$$T(a + bt + ct^2) = a + (2a - b)t + (b + c)t^2,$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere a base $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e seja $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ a base de $P_2(\mathbb{R})$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$ é igual a:

(a) $1 + 3t - t^2$;

(b) $\frac{1}{6}(9 + 4t + 3t^2)$;

(c) $2t + 3t^2$;

(d) $1 + t + 2t^2$;

(e) $-2t + 5t^2$.

(II) $\Rightarrow$ (I), porque T é inversível $\Leftrightarrow$ 0 não é autovalor de T

(II) $\Rightarrow$ (III), porque se T tem n autovalores distintos, então T é diagonalizável

(I) $\not\Rightarrow$ (II), p. ex: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é inversível e tem apenas 1 autovalor

(III) $\not\Rightarrow$ (II), p. ex: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e tem apenas 1 autovalor

(III) $\not\Rightarrow$ (I), p. ex: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável, mas não é inversível

(I) $\not\Rightarrow$ (III), p. ex: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é inversível, mas não é diagonalizável

$$[T]_{BC} = [T]_C \cdot [I]_{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [I]_{BC} = [T]_C^{-1} \cdot [T]_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow p_1(t) = 1 + 2t - 2t^2$

$p_2(t) = 3t^2$

$p_3(t) = -1 - 4t + 4t^2$