

**Q1.** Recorde que o *traço* de uma matriz quadrada é definido como sendo a soma das entradas na sua diagonal principal. Se  $A$  denota a matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

então o traço de  $A^{200}$  é igual a:

- (a)  $1 + (\sqrt{2} + 1)^{101}$ ;
- (b)  $1 + 2^{101}$ ;
- (c)  $1 + 2^{102}$ ;
- (d)  $1 + (\sqrt{2} + 1)^{102}$ ;
- (e)  $1 + (\sqrt{2})^{101}$ .

**Q2.** Seja  $A \in M_2(\mathbb{R})$  uma matriz real e seja  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  o operador linear tal que

$$[T]_{\text{can}} = A,$$

em que  $\text{can}$  denota a base canônica de  $\mathbb{C}^2$ . Denote por  $I \in M_2(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Se  $-i$  for um autovalor de  $T$ , então  $A^{38}$  será igual a:

- (a)  $iA$ ;
- (b)  $-I$ ;
- (c)  $I$ ;
- (d)  $-iA$ ;
- (e)  $-A$ .

**Q3.** Sejam  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real e  $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  o operador linear tal que  $[T]_{\text{can}} = A$ , em que  $\text{can}$  denota a base canônica de  $\mathbb{R}^6$ . Se o polinômio característico de  $T$  for

$$p_T(t) = (t^2 + t + 1)(t - 2)^2(t + 1)t,$$

então poderemos afirmar que:

- (a)  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ , mas não será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (b)  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ , mas não será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (c)  $A$  não será diagonalizável nem sobre  $\mathbb{R}$ , nem sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (d)  $A$  não será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  e  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$  se, e somente se, existirem vetores linearmente independentes  $v$  e  $w$  em  $\mathbb{R}^6$  tais que  $T(v) = 2v$  e  $T(w) = 2w$ ;
- (e)  $A$  não será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$  e  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se, existirem vetores linearmente independentes  $v$  e  $w$  em  $\mathbb{R}^6$  tais que  $T(v) = 2v$  e  $T(w) = 2w$ .

**Q4.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  um operador linear simétrico cujo polinômio característico é  $p_T(t) = (t - 3)^2(t - 4)^2$ . Se

$$T(1, 0, 1, 0) = (4, 0, 4, 0), \quad T(0, 1, 0, 1) = (0, 3, 0, 3) \quad \text{e}$$
$$T(1, -1, -1, 1) = (4, -4, -4, 4),$$

então  $T(2, 0, -2, 0)$  é igual a:

- (a)  $(-7, 1, 7, -1)$ ;
- (b)  $(1, -7, 7, -1)$ ;
- (c)  $(7, 1, -1, -7)$ ;
- (d)  $(7, -1, -7, 1)$ ;
- (e)  $(1, 7, -7, -1)$ .

**Q5.** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no espaço, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a quádrlica de equação

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + \sqrt{2}x + 2y + \sqrt{2}z = 3$$

e suponha que uma equação reduzida para essa quádrlica seja

$$3u^2 + v^2 + w^2 = k,$$

para um certo  $k \in \mathbb{R}$ . Sabe-se que 3 é um autovalor da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e que:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O valor de  $k$  é:

- (a) 5;
- (b) 0;
- (c) 2;
- (d) 1;
- (e) 3.

**Q6.** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tais que 2 e 4 sejam os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

e seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a elipse de equação:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = 1.$$

Uma equação reduzida para essa elipse é:

- (a)  $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4} = 1$ ;
- (b)  $2u^2 + v^2 = 1$ ;
- (c)  $\frac{u^2}{\sqrt{2}} + \frac{v^2}{2} = 1$ ;
- (d)  $4u^2 + 2v^2 = 1$ ;
- (e)  $2u^2 + \sqrt{2}v^2 = 1$ .

**Q7.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear tal que

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix},$$

em que can denota a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Temos que o subespaço

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

é invariante por  $T$  se, e somente se:

- (a)  $a = 1$  e  $b = 2$ ;
- (b)  $a = 0$  e  $b = -1$ ;
- (c)  $a = 2$  e  $b = 0$ ;
- (d)  $a = -1$  e  $b = 0$ ;
- (e)  $a = 2$  e  $b = 3$ .

**Q8.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear simétrico cujos autovalores são 1 e  $-2$  e que satisfaz

$$\text{Ker}(T + 2I) = [(1, 0, 1), (0, 1, 0)],$$

em que  $I$  denota o operador identidade de  $\mathbb{R}^3$ . Se  $T(2, 1, 0) = (x, y, z)$ , então  $x + y + z$  é igual a:

- (a)  $-3$ ;
- (b)  $-4$ ;
- (c)  $0$ ;
- (d)  $-6$ ;
- (e)  $-5$ .

**Q9.** O polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

é  $p_A(t) = -(t - 5)(t + 1)^2$ . Temos que a solução  $X$  do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  satisfazendo a condição  $X(0) = (0, 3, 3)$  é dada por:

- (a)  $X(t) = (e^{-t} - e^{5t}, \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{5t}, e^{-t} + 2e^{5t})$ ;
- (b)  $X(t) = (e^{5t} - e^{-t}, e^{5t} + 2e^{-t}, 2e^{5t} + e^{-t})$ ;
- (c)  $X(t) = (e^{-t} - e^{5t}, e^{-t} + 2e^{5t}, 3e^{-t})$ ;
- (d)  $X(t) = (e^{5t} - e^{-t}, e^{5t} + 2e^{-t}, e^{5t} + 2e^{-t})$ ;
- (e)  $X(t) = (e^{-t} - e^{5t}, e^{-t} + 2e^{5t}, 2e^{-t} + e^{5t})$ .

**Q10.** Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$  uma matriz real e seja  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  o operador linear tal que  $[T]_{\text{can}} = A$ , em que can denota a base canônica de  $\mathbb{C}^3$ . Suponha que o polinômio característico de  $T$  seja

$$p_T(t) = -(t - 2)(t^2 + t + 1)$$

e que

$$\text{Ker}(T - 2I) = [(1, 0, 1)] \quad \text{e} \quad \text{Ker}(T - \lambda I) = [(i, 1, 0)],$$

em que  $\lambda \in \mathbb{C}$  denota o autovalor de  $T$  que tem a parte imaginária positiva e  $I$  denota o operador identidade de  $\mathbb{C}^3$ . Temos que a solução geral real  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$  do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - C_2 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ z(t) = C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ z(t) = C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_3 e^{2t}, \\ z(t) = -C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases} \\ \text{(d)} \quad & \begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_3 e^{2t}, \\ z(t) = C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases} \\ \text{(e)} \quad & \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - C_2 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ z(t) = C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

**Q11.** Sejam  $V$  um espaço vetorial complexo de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se existir uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que a matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  seja real, então o polinômio característico de  $T$  terá coeficientes reais;
- (II) se existirem  $b, c \in \mathbb{C}$  tais que  $b^2 \neq 4c$  e o polinômio característico de  $T$  seja  $p_T(t) = t^2 + bt + c$ , então  $T$  será diagonalizável;
- (III) se  $1 + i$  for um autovalor de  $T$ , então  $1 - i$  também será um autovalor de  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

**Q12.** Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $V$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno. Sejam  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  bases de  $V$  e  $M \in M_n(\mathbb{R})$  a matriz tal que

$$M[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}},$$

para todo  $v \in V$ . Pode-se afirmar que:

- (a) se as bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem ortonormais, então a transposta da matriz  $M$  será igual à inversa de  $M$ ;
- (b) se as bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem ortogonais, então a transposta da matriz  $M$  será igual a  $-M$ ;
- (c) se as bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem ortonormais, então a transposta da matriz  $M$  será igual a  $-M$ ;
- (d) se as bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem ortonormais, então a transposta da matriz  $M$  será igual a  $M$ ;
- (e) se as bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem ortogonais, então a transposta da matriz  $M$  será igual à inversa de  $M$ .

**Q13.** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no espaço, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal, e considere o elipsóide de equação:

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy + 3z^2 + 2x - 6y + 12z = 42.$$

Assinale a alternativa contendo três vetores que sejam paralelos aos eixos de simetria desse elipsóide:

- (a)  $(1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$ ,  $(1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$  e  $(0, 0, 1)_{\mathcal{B}}$ ;
- (b)  $(1, 0, 2)_{\mathcal{B}}$ ,  $(2, 0, -1)_{\mathcal{B}}$  e  $(0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ ;
- (c)  $(2, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ ,  $(1, -2, 0)_{\mathcal{B}}$  e  $(0, 0, 2)_{\mathcal{B}}$ ;
- (d)  $(1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$ ,  $(2, -1, -1)_{\mathcal{B}}$  e  $(0, 1, -1)_{\mathcal{B}}$ ;
- (e)  $(1, 2, 0)_{\mathcal{B}}$ ,  $(2, -1, 0)_{\mathcal{B}}$  e  $(0, 0, 2)_{\mathcal{B}}$ .

**Q14.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial complexo de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for um operador linear e  $\lambda \in \mathbb{C}$  for um autovalor de  $T$ , então o conjugado de  $\lambda$  também será um autovalor de  $T$ ;
- (II) se uma matriz real  $A \in M_n(\mathbb{R})$  for diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ , então ela também será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (III) se uma matriz real  $A \in M_n(\mathbb{R})$  for diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ , então ela também será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

**Q15.** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal, e seja dado  $k \in \mathbb{R}$ . Temos que a equação

$$5x^2 + 6xy - 3y^2 + \frac{1}{\sqrt{10}}(44x - 12y) = k$$

representa uma hipérbole se, e somente se:

- (a)  $k = -2$ ;
- (b)  $k \neq 1$ ;
- (c)  $k = 1$ ;
- (d)  $k \neq 0$ ;
- (e)  $k \neq -2$ .

**Q16.** Sejam  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Suponha que exista uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que a matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  seja simétrica. Considere as seguintes afirmações:

- (I) o operador  $T$  é simétrico;
- (II) o operador  $T$  é diagonalizável;
- (III) existe uma base ortonormal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (d) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.