

Q1. Sejam n um inteiro positivo e V um espaço vetorial real de dimensão n munido de um produto interno. Sejam \mathcal{B} e \mathcal{C} bases de V e $M \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz tal que

$$M[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}},$$

para todo $v \in V$. Pode-se afirmar que:

- (a) se as bases \mathcal{B} e \mathcal{C} forem ortonormais, então a transposta da matriz M será igual a $-M$;
- (b) se as bases \mathcal{B} e \mathcal{C} forem ortonormais, então a transposta da matriz M será igual à inversa de M ;
- (c) se as bases \mathcal{B} e \mathcal{C} forem ortogonais, então a transposta da matriz M será igual a $-M$;
- (d) se as bases \mathcal{B} e \mathcal{C} forem ortogonais, então a transposta da matriz M será igual à inversa de M ;
- (e) se as bases \mathcal{B} e \mathcal{C} forem ortonormais, então a transposta da matriz M será igual a M .

Q2. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real e seja $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ o operador linear tal que $[T]_{\text{can}} = A$, em que can denota a base canônica de \mathbb{C}^3 . Suponha que o polinômio característico de T seja

$$p_T(t) = -(t - 2)(t^2 + t + 1)$$

e que

$$\text{Ker}(T - 2I) = [(1, 0, 1)] \quad \text{e} \quad \text{Ker}(T - \lambda I) = [(i, 1, 0)],$$

em que $\lambda \in \mathbb{C}$ denota o autovalor de T que tem a parte imaginária positiva e I denota o operador identidade de \mathbb{C}^3 . Temos que a solução geral real $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ z(t) = C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - C_2 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ z(t) = C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_3 e^{2t}, \\ z(t) = -C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases} \\ \text{(d)} \quad & \begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_3 e^{2t}, \\ z(t) = C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases} \\ \text{(e)} \quad & \begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - C_2 e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ z(t) = C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

Q3. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real e seja $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\text{can}} = A,$$

em que can denota a base canônica de \mathbb{C}^2 . Denote por $I \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz identidade. Se $-i$ for um autovalor de T , então A^{38} será igual a:

- (a) $-iA$;
- (b) I ;
- (c) $-I$;
- (d) iA ;
- (e) $-A$.

Q4. Sejam $A \in M_6(\mathbb{R})$ uma matriz real e $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ o operador linear tal que $[T]_{\text{can}} = A$, em que can denota a base canônica de \mathbb{R}^6 . Se o polinômio característico de T for

$$p_T(t) = (t^2 + t + 1)(t - 2)^2(t + 1)t,$$

então poderemos afirmar que:

- (a) A será diagonalizável sobre \mathbb{R} , mas não será diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (b) A não será diagonalizável sobre \mathbb{C} e A será diagonalizável sobre \mathbb{R} se, e somente se, existirem vetores linearmente independentes v e w em \mathbb{R}^6 tais que $T(v) = 2v$ e $T(w) = 2w$;
- (c) A não será diagonalizável nem sobre \mathbb{R} , nem sobre \mathbb{C} ;
- (d) A não será diagonalizável sobre \mathbb{R} e A será diagonalizável sobre \mathbb{C} se, e somente se, existirem vetores linearmente independentes v e w em \mathbb{R}^6 tais que $T(v) = 2v$ e $T(w) = 2w$;
- (e) A será diagonalizável sobre \mathbb{C} , mas não será diagonalizável sobre \mathbb{R} .

Q5. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se V for um espaço vetorial complexo de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ for um operador linear e $\lambda \in \mathbb{C}$ for um autovalor de T , então o conjugado de λ também será um autovalor de T ;
- (II) se uma matriz real $A \in M_n(\mathbb{R})$ for diagonalizável sobre \mathbb{C} , então ela também será diagonalizável sobre \mathbb{R} ;
- (III) se uma matriz real $A \in M_n(\mathbb{R})$ for diagonalizável sobre \mathbb{R} , então ela também será diagonalizável sobre \mathbb{C} .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q6. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com \mathcal{B} uma base ortonormal. Considere a quádrlica de equação

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + \sqrt{2}x + 2y + \sqrt{2}z = 3$$

e suponha que uma equação reduzida para essa quádrlica seja

$$3u^2 + v^2 + w^2 = k,$$

para um certo $k \in \mathbb{R}$. Sabe-se que 3 é um autovalor da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e que:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O valor de k é:

- (a) 3;
- (b) 1;
- (c) 5;
- (d) 2;
- (e) 0.

Q7. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com \mathcal{B} uma base ortonormal, e seja dado $k \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$5x^2 + 6xy - 3y^2 + \frac{1}{\sqrt{10}}(44x - 12y) = k$$

representa uma hipérbole se, e somente se:

- (a) $k \neq -2$;
- (b) $k = 1$;
- (c) $k \neq 0$;
- (d) $k = -2$;
- (e) $k \neq 1$.

Q8. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que 2 e 4 sejam os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

e seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com \mathcal{B} uma base ortonormal. Considere a elipse de equação:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = 1.$$

Uma equação reduzida para essa elipse é:

- (a) $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4} = 1$;
- (b) $2u^2 + \sqrt{2}v^2 = 1$;
- (c) $2u^2 + v^2 = 1$;
- (d) $4u^2 + 2v^2 = 1$;
- (e) $\frac{u^2}{\sqrt{2}} + \frac{v^2}{2} = 1$.

Q9. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um operador linear simétrico cujo polinômio característico é $p_T(t) = (t - 3)^2(t - 4)^2$. Se

$$T(1, 0, 1, 0) = (4, 0, 4, 0), \quad T(0, 1, 0, 1) = (0, 3, 0, 3) \quad \text{e}$$

$$T(1, -1, -1, 1) = (4, -4, -4, 4),$$

então $T(2, 0, -2, 0)$ é igual a:

- (a) $(7, 1, -1, -7)$;
- (b) $(7, -1, -7, 1)$;
- (c) $(1, 7, -7, -1)$;
- (d) $(-7, 1, 7, -1)$;
- (e) $(1, -7, 7, -1)$.

Q10. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Suponha que exista uma base \mathcal{B} de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja simétrica. Considere as seguintes afirmações:

- (I) o operador T é simétrico;
- (II) o operador T é diagonalizável;
- (III) existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (c) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q11. Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se existir uma base \mathcal{B} de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja real, então o polinômio característico de T terá coeficientes reais;
- (II) se existirem $b, c \in \mathbb{C}$ tais que $b^2 \neq 4c$ e o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^2 + bt + c$, então T será diagonalizável;
- (III) se $1 + i$ for um autovalor de T , então $1 - i$ também será um autovalor de T .

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q12. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear simétrico cujos autovalores são 1 e -2 e que satisfaz

$$\text{Ker}(T + 2I) = [(1, 0, 1), (0, 1, 0)],$$

em que I denota o operador identidade de \mathbb{R}^3 . Se $T(2, 1, 0) = (x, y, z)$, então $x + y + z$ é igual a:

- (a) -5 ;
- (b) -6 ;
- (c) 0 ;
- (d) -4 ;
- (e) -3 .

Q13. O polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

é $p_A(t) = -(t - 5)(t + 1)^2$. Temos que a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 3, 3)$ é dada por:

- (a) $X(t) = (e^{-t} - e^{5t}, e^{-t} + 2e^{5t}, 2e^{-t} + e^{5t})$;
- (b) $X(t) = (e^{-t} - e^{5t}, \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{5t}, e^{-t} + 2e^{5t})$;
- (c) $X(t) = (e^{5t} - e^{-t}, e^{5t} + 2e^{-t}, 2e^{5t} + e^{-t})$;
- (d) $X(t) = (e^{-t} - e^{5t}, e^{-t} + 2e^{5t}, 3e^{-t})$;
- (e) $X(t) = (e^{5t} - e^{-t}, e^{5t} + 2e^{-t}, e^{5t} + 2e^{-t})$.

Q14. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix},$$

em que can denota a base canônica de \mathbb{R}^3 . Temos que o subespaço

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

é invariante por T se, e somente se:

- (a) $a = -1$ e $b = 0$;
- (b) $a = 0$ e $b = -1$;
- (c) $a = 1$ e $b = 2$;
- (d) $a = 2$ e $b = 0$;
- (e) $a = 2$ e $b = 3$.

Q15. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com \mathcal{B} uma base ortonormal, e considere o elipsóide de equação:

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy + 3z^2 + 2x - 6y + 12z = 42.$$

Assinale a alternativa contendo três vetores que sejam paralelos aos eixos de simetria desse elipsóide:

- (a) $(1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$, $(2, -1, -1)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 1, -1)_{\mathcal{B}}$;
- (b) $(1, 2, 0)_{\mathcal{B}}$, $(2, -1, 0)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 0, 2)_{\mathcal{B}}$;
- (c) $(1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$, $(1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 0, 1)_{\mathcal{B}}$;
- (d) $(2, 1, 0)_{\mathcal{B}}$, $(1, -2, 0)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 0, 2)_{\mathcal{B}}$;
- (e) $(1, 0, 2)_{\mathcal{B}}$, $(2, 0, -1)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$.

Q16. Recorde que o *traço* de uma matriz quadrada é definido como sendo a soma das entradas na sua diagonal principal. Se A denota a matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

então o traço de A^{200} é igual a:

- (a) $1 + (\sqrt{2} + 1)^{102}$;
- (b) $1 + (\sqrt{2} + 1)^{101}$;
- (c) $1 + 2^{101}$;
- (d) $1 + 2^{102}$;
- (e) $1 + (\sqrt{2})^{101}$.