MAT-3458 — P3 — 2016

GABARITO

Q9 Sendo que i é autovalor e que A tem entradas reais, $\bar{i} = -i$ também deve ser autovalor. Como estamos em dimensão 2, são os dois únicos autovalores e a matriz A é diagonalizável e semelhante à matriz D onde

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Sabemos então que A^{38} será semelhante a D^{38}. Como

$$D^{38} = \begin{pmatrix} i^{38} & 0 \\ 0 & (-i)^{38} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I,$$

temos que $A^{38} = P(-I)P^{-1} = -PP^{-1} = -I$ (onde P é a matriz de mudança de base que testemunha que A^{38} e D^{38} são semelhantes).

Resposta (a).

Q10 (I) e (III) não valem a não ser que $[T]_B$ seja simétrica em base B **ortonormal**. (II) é verdadeira, desde que $[T]_B$ seja simétrica, logo diagonalizável.

Resposta (a).

Q11 A é a matriz da parte quadrática $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz$ da quádrica. Os vetores $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ são autovetores de valor 1. Sabendo que A é simétrica, $V(3)$ deve ser ortogonal a $V(1)$, logo $V(3)$ é uma reta gerada por $(1,0,1) \wedge (0,1,0) = (-1,0,1)$. Depois de normalizar temos portanto a seguinte base B ortonormal de autovetores, colocados na ordem de u, v, w, i,e, associados a $3, 1, 1$ nessa ordem:

$$B = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), (0,1,0)\}$$

e a matriz de mudança de base associada é

$$M = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Se (x', y', z') são as coordenadas na nova base temos portanto

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')$$

$$y = z'$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

e a nova equação é

$$3x'^2 + y'^2 + z'^2 + (-x' + y') + 2z' + (x' + y') = 3$$

ou ainda

$$3x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y' + 2z' = 3.$$

Colocando $u = x'$, $v = y' + 1$, $w = z' + 1$ a equação final é

$$3u^2 + v^2 - 1 + w^2 - 1 = 3$$

ou seja

$$3u^2 + v^2 + w^2 = 5.$$

Resposta (e).

Q12 Como $t^2 + t + 1$ tem duas raizes complexas não reais (conjugadas), A não é diagonalizável sobre R. Como as outras raizes são 2 (dupla), -1 (simples) e 0 (simples), todas as raizes são simples salvo $\lambda = 2$. Logo A será diagonalizável sobre C se e somente se a dimensão de $V(2)$ é 2, ou seja se existirem dois vetores LI em $V(2)$.
Resposta (a).

Q13 (I) é falso em geral. Será verdadeiro se p_T tiver coeficientes reais (e em particular se a matriz de T em alguma base for matriz real). (III) é verdadeiro e (II) falso em geral.
Resposta (b).

Q14 Observamos primeiro que
$$T(1,0,1) = (-2,0,-2)$$
e
$$T(0,1,0) = (0,-2,0)$$
Como T é simétrico, os subespaços $V(-2)$ e $V(1)$ são ortogonais. Logo $V(1)$ é gerado por $(1,0,1) \wedge (0,1,0) = (-1,0,1)$. Isso significa que
$$T(-1,0,1) = (-1,0,1).$$
Depois devemos escrever $(2,1,0)$ como combinação linear dos vetores da base de autovetores, $(2,1,0) = a(1,0,1) + b(-1,0,1) + c(0,1,0)$ Resolvendo um sistema:
$$(2,1,0) = (1,0,1) - (-1,0,1) + (0,1,0)$$
Logo
$$T(2,1,0) = T(1,0,1) - T(-1,0,1) + T(0,1,0) = (-2,0,-2) - (-1,0,1) + (0,-2,0) = (-1,-2,-3).$$
Resposta (e).

Q15 Os eixos de simetria serão paralelos aos autovetores da matriz associada. Basta portanto diagonalizar a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
O polinômio é
$$p_A(t) = (t^2 - 6t + 8)(t-3) = (t-2)(t-3)(t-4)$$
Os autovalores são $2, 3, 4$.
A equação de $V(2)$ é $x + y = 0, z = 0$, logo $V(2) = [(1,-1,0)]$
A equação de $V(4)$ é $x - y = 0, z = 0$, logo $V(4) = [(1,1,0)]$
A equação de $V(3)$ é $y = 0, x = 0$, logo $V(3) = [(0,0,1)]$ (ou então calcula-se que o vetor deve ser ortogonal a $V(2)$ e $V(4)$).
Resposta (d).

Q16 Devemos calcular $V(5)$ e $V(-1)$.
$\lambda = 5$: resolvido o sistema, achamos $z = 2y = 2x$, logo $V(5) = [(1,1,2)]$.
$\lambda = -1$: resolvido o sistema, achamos $3x + y + z = 0$, logo $V(-1) = [(1,-3,0),(0,1,-1)]$ (por exemplo).
A solução geral do sistema será portanto
$$X = K_1 e^{5t}(1,1,2) + K_2 e^{-t}(1,-3,0) + K_3 e^{-t}(0,1,-1).$$
Para $t = 0$, temos
$$(0,3,3) = X(0) = K_1(1,1,2) + K_2(1,-3,0) + K_3(0,1,-1).$$
Logo
$$0 = K_1 + K_2,\ 3 = K_1 - 3K_2 + K_3,\ 3 = 2K_1 - K_3.$$
resultando em
$$K_1 = 1,\ K_2 = K_3 = -1.$$
Afinal de contas $X = e^{5t}(1,1,2) - e^{-t}(1,-3,0) - e^{-t}(0,1,-1) = (e^{5t} - e^{-t}, e^{5t} + 2e^{-t}, 2e^{5t} + e^{-t})$
Resposta (a)