Q1. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 3 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V tal que:

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 2, \quad \langle v_2, v_2 \rangle = 4, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 2, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle v_2, v_3 \rangle = 0.$$

Se $\{w_1, w_2, w_3\}$ for a base ortogonal de V obtida de $\mathcal{B}$ pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram–Schmidt, então w_3 será igual a:

(a) $v_3 - \frac{1}{2}v_2$;
(b) $v_3 + \frac{1}{2}v_1 - v_2$;
(c) $v_3 - v_1 + \frac{1}{2}v_2$;
(d) $v_3 - \frac{1}{4}v_1 - \frac{1}{4}v_2$;
(e) $v_3 - \frac{1}{2}v_1$.

Q2. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

A soma das entradas da matriz A é igual a:

(a) 0;
(b) 2;
(c) 1;
(d) -1;
(e) -2.

Q3. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $\mathcal{B}$ uma base de V, $T : V \to V$ um operador linear e $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Assinale a alternativa correta:

(a) se T for simétrico e $\mathcal{B}$ for ortonormal, então A será diagonal;
(b) se T for simétrico e A não for simétrica, então $\mathcal{B}$ não será ortonormal;
(c) se $\mathcal{B}$ for ortonormal, então A será simétrica e T será diagonalizável;
(d) se A for diagonal, então $\mathcal{B}$ será formada por autovetores de T e T será simétrico;
(e) se T for diagonalizável e A for diagonal, então $\mathcal{B}$ será ortonormal.

Q4. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear que seja representado na base canônica de $\mathbb{C}^2$ por uma matriz real e se $(2+i, 3+2i)$ for um autovetor de T, então $(2-i, 3-2i)$ também será um autovetor de T;

(b) se $A \in M_2(\mathbb{C})$ for tal que seu polinômio característico tenha duas raízes reais distintas, então $A \in M_2(\mathbb{R})$;

(c) se o polinômio característico de $A \in M_2(\mathbb{C})$ tiver coeficientes reais e se i for um autovalor de A, então existirá uma matriz inversível $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal;

(d) se o polinômio característico de $A \in M_2(\mathbb{C})$ tiver coeficientes reais e se i for um autovalor de A, então $-i$ também será um autovalor de A;

(e) se $A \in M_2(\mathbb{R})$ for tal que seu polinômio característico tenha uma raiz complexa não real, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Q5. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \to V$ um operador linear tal que

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para todos $v, w \in V$. Suponha que $\lambda \in \mathbb{R}$ seja um autovalor de T. Pode-se afirmar que:

(a) $\lambda > 1$ ou $\lambda < -1$;

(b) $\lambda = 0$;

(c) $\lambda > 0$;

(d) $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$;

(e) $\lambda < 0$.

Q6. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

tenha polinômio característico dado por $p_A(t) = (t-1)(t-3)$ e tais que seja satisfeita a igualdade:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e considere a cônica de equação:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy - \frac{12}{\sqrt{5}}\,x + \frac{6}{\sqrt{5}}\,y + 1 = 0.$$

Uma equação reduzida para essa cônica é:

(a) $u^2 + 3v^2 = 2$;
(b) $u^2 + 3v^2 = 5$;
(c) $u^2 + 3v^2 = 1$;
(d) $2u^2 + 6v^2 = 3$;
(e) $2u^2 + 6v^2 = 1$.

Q7. Considere o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}).$$

Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ um operador linear simétrico cujos únicos autovalores sejam 2 e 5 e que satisfaça a igualdade

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1, t^2],$$

em que I denota o operador identidade de $P_3(\mathbb{R})$. Temos que $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ é igual a:

(a) $[t + t^2, t^3]$;
(b) $[t, t^2 + t^3]$;
(c) $[t + 1, t^3]$;
(d) $[t, t^3 + 1]$;
(e) $[t, t^3]$.

Q8. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica cujo polinômio característico seja dado por $p_A(t) = t - t^3$ e que satisfaça as igualdades:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (-1, 3, 1)$ é dada por:

(a) $X(t) = (-e^{-t}, 1 + e^t + e^{-t}, e^t)$;
(b) $X(t) = (-e^t, 3e^{-t}, 1)$;
(c) $X(t) = (1 - 2e^{-t}, 1 + e^t + e^{-t}, 1 - e^t + e^{-t})$;
(d) $X(t) = (-1 + e^t - e^{-t}, e^t + 2e^{-t}, e^t)$;
(e) $X(t) = (-1, 3e^{-t}, e^{-t})$.

Q9. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) se $\mathcal{B}$ for uma base de V e $v \in V$ for ortogonal a todo elemento de $\mathcal{B}$, então $v = 0$;
(II) se W for um subespaço de V tal que $W^\perp = \{0\}$, então $W = V$;
(III) se $T : V \to V$ for um operador linear e W for um subespaço de V invariante por T, então $W^\perp$ também será invariante por T.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q10. Seja $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de $\mathbb{R}^4$ e considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}.$$

Se $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ for a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

então $T(1,0,1,0)$ será igual a:

(a) $v_2 - 3v_4$;
(b) $-v_1 - 3v_2 + v_4$;
(c) $v_1 + v_3$;
(d) $-2v_2$;
(e) $2v_1 + v_2 + v_3$.

Q11. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz cujos únicos autovalores reais sejam 1 e 3. Pode-se afirmar que:

(a) A é simétrica;
(b) A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;
(c) o polinômio característico de A é $p_A(t) = (t-1)(t-3)$;
(d) a soma das entradas na diagonal principal de A é igual a 4;
(e) A é inversível.

Q12. Sejam $n \geq 2$ um inteiro e A a matriz $n \times n$ cujas entradas sejam todas iguais a 1. Considere as seguintes afirmações:

(I) A não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;
(II) n é um autovalor de A;
(III) 0 é uma raiz do polinômio característico de A cuja multiplicidade é igual a $n-1$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

Q13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1,0,0) = 1 + at - t^2, \quad T(0,1,0) = -1 + t + 2t^2 - 5t^3$$
$$\text{e} \quad T(0,0,1) = 2 + bt - 3t^2 + 5t^3.$$

Temos que T será injetora se, e somente se, $a - b$ for diferente de:

(a) 4;
(b) 3;
(c) 2;
(d) 1;
(e) 0.

Q14. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,2,0),(-2,0,1),(1,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ for a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

então $T(-1,3)$ será igual a:

(a) $(2,-1,3)$;
(b) $(2,2,0)$;
(c) $(-2,2,-4)$;
(d) $(7,7,2)$;
(e) $(-10,0,-2)$.

Q15. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y - t = 0 \text{ e } y - z + t = 0\big\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a uma base de $S^{\perp}$:

(a) $\{(-1,1,0,0),(-1,0,2,0),(1,0,0,1)\}$;
(b) $\{(-2,1,0,0),(1,0,2,0),(0,0,0,1)\}$;
(c) $\{(-3,2,2,0),(2,-1,0,1)\}$;
(d) $\{(2,4,-1,0)\}$;
(e) $\{(2,3,0,-1),(0,1,-1,1)\}$.

Q16. A soma das duas entradas na primeira coluna da matriz

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}^{2016}$$

é igual a:

(a) $-2 \cdot 3^{2017} + 1$;
(b) $3^{2017} - 2$;
(c) $2 \cdot 3^{2017} + 3$;
(d) $3^{2017} + 1$;
(e) $-2 \cdot 3^{2017} + 2$.