

Q1. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \rightarrow V$ um operador linear tal que

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para todos $v, w \in V$. Suponha que $\lambda \in \mathbb{R}$ seja um autovalor de T . Pode-se afirmar que:

- (a) $\lambda > 1$ ou $\lambda < -1$;
- (b) $\lambda < 0$;
- (c) $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$;
- (d) $\lambda = 0$;
- (e) $\lambda > 0$.

Q2. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1, 2, 0), (-2, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

de \mathbb{R}^2 e de \mathbb{R}^3 , respectivamente. Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ for a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

então $T(-1, 3)$ será igual a:

- (a) $(-2, 2, -4)$;
- (b) $(2, -1, 3)$;
- (c) $(-10, 0, -2)$;
- (d) $(2, 2, 0)$;
- (e) $(7, 7, 2)$.

Q3. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 3 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V tal que:

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 2, \quad \langle v_2, v_2 \rangle = 4, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 2, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle v_2, v_3 \rangle = 0.$$

Se $\{w_1, w_2, w_3\}$ for a base ortogonal de V obtida de \mathcal{B} pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, então w_3 será igual a:

- (a) $v_3 - v_1 + \frac{1}{2}v_2$;
- (b) $v_3 - \frac{1}{2}v_2$;
- (c) $v_3 - \frac{1}{4}v_1 - \frac{1}{4}v_2$;
- (d) $v_3 + \frac{1}{2}v_1 - v_2$;
- (e) $v_3 - \frac{1}{2}v_1$.

Q4. Seja $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de \mathbb{R}^4 e considere a base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}.$$

Se $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ for a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

então $T(1, 0, 1, 0)$ será igual a:

- (a) $-2v_2$;
- (b) $v_1 + v_3$;
- (c) $2v_1 + v_2 + v_3$;
- (d) $v_2 - 3v_4$;
- (e) $-v_1 - 3v_2 + v_4$.

Q5. A soma das duas entradas na primeira coluna da matriz

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}^{2016}$$

é igual a:

- (a) $-2 \cdot 3^{2017} + 1$;
- (b) $3^{2017} + 1$;
- (c) $-2 \cdot 3^{2017} + 2$;
- (d) $2 \cdot 3^{2017} + 3$;
- (e) $3^{2017} - 2$.

Q6. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica cujo polinômio característico seja dado por $p_A(t) = t - t^3$ e que satisfaça as igualdades:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (-1, 3, 1)$ é dada por:

- (a) $X(t) = (-1 + e^t - e^{-t}, e^t + 2e^{-t}, e^t)$;
- (b) $X(t) = (1 - 2e^{-t}, 1 + e^t + e^{-t}, 1 - e^t + e^{-t})$;
- (c) $X(t) = (-e^t, 3e^{-t}, 1)$;
- (d) $X(t) = (-e^{-t}, 1 + e^t + e^{-t}, e^t)$;
- (e) $X(t) = (-1, 3e^{-t}, e^{-t})$.

Q7. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) se \mathcal{B} for uma base de V e $v \in V$ for ortogonal a todo elemento de \mathcal{B} , então $v = 0$;
- (II) se W for um subespaço de V tal que $W^\perp = \{0\}$, então $W = V$;
- (III) se $T : V \rightarrow V$ for um operador linear e W for um subespaço de V invariante por T , então W^\perp também será invariante por T .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q8. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) se o polinômio característico de $A \in M_2(\mathbb{C})$ tiver coeficientes reais e se i for um autovalor de A , então $-i$ também será um autovalor de A ;
- (b) se $A \in M_2(\mathbb{C})$ for tal que seu polinômio característico tenha duas raízes reais distintas, então $A \in M_2(\mathbb{R})$;
- (c) se o polinômio característico de $A \in M_2(\mathbb{C})$ tiver coeficientes reais e se i for um autovalor de A , então existirá uma matriz inversível $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal;
- (d) se $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ for um operador linear que seja representado na base canônica de \mathbb{C}^2 por uma matriz real e se $(2 + i, 3 + 2i)$ for um autovetor de T , então $(2 - i, 3 - 2i)$ também será um autovetor de T ;
- (e) se $A \in M_2(\mathbb{R})$ for tal que seu polinômio característico tenha uma raiz complexa não real, então A será diagonalizável sobre \mathbb{C} .

Q9. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, \mathcal{B} uma base de V , $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Assinale a alternativa correta:

- (a) se A for diagonal, então \mathcal{B} será formada por autovetores de T e T será simétrico;
- (b) se T for simétrico e \mathcal{B} for ortonormal, então A será diagonal;
- (c) se \mathcal{B} for ortonormal, então A será simétrica e T será diagonalizável;
- (d) se T for simétrico e A não for simétrica, então \mathcal{B} não será ortonormal;
- (e) se T for diagonalizável e A for diagonal, então \mathcal{B} será ortonormal.

Q10. Sejam $n \geq 2$ um inteiro e A a matriz $n \times n$ cujas entradas sejam todas iguais a 1. Considere as seguintes afirmações:

- (I) A não é diagonalizável sobre \mathbb{R} ;
- (II) n é um autovalor de A ;
- (III) 0 é uma raiz do polinômio característico de A cuja multiplicidade é igual a $n - 1$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q11. Considere o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt, \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}).$$

Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ um operador linear simétrico cujos únicos autovalores sejam 2 e 5 e que satisfaça a igualdade

$$\text{Ker}(T - 2I) = [1, t^2],$$

em que I denota o operador identidade de $P_3(\mathbb{R})$. Temos que $\text{Ker}(T - 5I)$ é igual a:

- (a) $[t, t^2 + t^3]$;
- (b) $[t + 1, t^3]$;
- (c) $[t + t^2, t^3]$;
- (d) $[t, t^3 + 1]$;
- (e) $[t, t^3]$.

Q12. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

tenha polinômio característico dado por $p_A(t) = (t-1)(t-3)$ e tais que seja satisfeita a igualdade:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com \mathcal{B} uma base ortonormal, e considere a cônica de equação:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy - \frac{12}{\sqrt{5}}x + \frac{6}{\sqrt{5}}y + 1 = 0.$$

Uma equação reduzida para essa cônica é:

- (a) $u^2 + 3v^2 = 5$;
- (b) $u^2 + 3v^2 = 1$;
- (c) $2u^2 + 6v^2 = 1$;
- (d) $u^2 + 3v^2 = 2$;
- (e) $2u^2 + 6v^2 = 3$.

Q13. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

A soma das entradas da matriz A é igual a:

- (a) -1 ;
- (b) 2 ;
- (c) 1 ;
- (d) 0 ;
- (e) -2 .

Q14. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço de \mathbb{R}^4 definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y - t = 0 \text{ e } y - z + t = 0\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a uma base de S^\perp :

- (a) $\{(-2, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 1)\}$;
- (b) $\{(-3, 2, 2, 0), (2, -1, 0, 1)\}$;
- (c) $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 1)\}$;
- (d) $\{(2, 4, -1, 0)\}$;
- (e) $\{(2, 3, 0, -1), (0, 1, -1, 1)\}$.

Q15. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1, 0, 0) = 1 + at - t^2, \quad T(0, 1, 0) = -1 + t + 2t^2 - 5t^3$$

$$\text{e } T(0, 0, 1) = 2 + bt - 3t^2 + 5t^3.$$

Temos que T será injetora se, e somente se, $a - b$ for diferente de:

- (a) 1;
- (b) 3;
- (c) 2;
- (d) 4;
- (e) 0.

Q16. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz cujos únicos autovalores reais sejam 1 e 3. Pode-se afirmar que:

- (a) A é simétrica;
- (b) A é inversível;
- (c) o polinômio característico de A é $p_A(t) = (t - 1)(t - 3)$;
- (d) a soma das entradas na diagonal principal de A é igual a 4;
- (e) A é diagonalizável sobre \mathbb{R} .