Prova de tipo 0 - GABARITO

Q1. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) se $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base de V e se $v \in V$ é tal que $\langle v, e_i\rangle = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$, então $v = 0$;

(II) se S é um subespaço de V e se $e_1, e_2, \dots, e_m \in S$ são vetores dois a dois distintos tais que $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ é uma base de S, então

$$\operatorname{proj}_S v = \operatorname{proj}_{e_1} v + \operatorname{proj}_{e_2} v + \cdots + \operatorname{proj}_{e_m} v,$$

para qualquer $v \in V$;

(III) se $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, então:

$$\operatorname{proj}_{\lambda v} w = \lambda \operatorname{proj}_v w.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q2. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = [(2, 1, -1, 2), (-1, 2, -2, -1)].$$

Se $v \in S$ e $w \in S^\perp$ são tais que

$$(6, -4, 2, 2) = v + w$$

e se $w = (a, b, c, d)$, então $a + b + c + d$ é igual a:

(a) -4;
(b) -6;
(c) 2;
(d) 8;
(e) -2.

---

1 $\boxed{\text{I) V}}$ De fato, $(\forall v \in V)\ (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R})\ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Assim, se $\langle v, e_i\rangle = 0,\ \forall i$, então $\langle v, v\rangle = \langle v, \sum_i \alpha_i e_i\rangle =$

$$= \sum_i \alpha_i \cdot \langle v, e_i\rangle = \sum_i \alpha_i \cdot 0 = 0 \quad \text{e} \ \therefore\ v = 0. \quad \#$$

$\boxed{\text{(II) F}}$ Basta considerar $\mathbb{R}^3$ com o prod. interno usual: $S = [(1,0,0); (0,1,0)]$ e $v = (1,2,3)$

Dado que $\{(1,0,0); (0,1,0)\}$ é ortogonal (base de S), segue que $pr_S v = pr_{(1,0,0)} v + pr_{(0,1,0)} v = \frac{1}{1}(1,0,0) + \frac{2}{1}(0,1,0) = (1,2,0)$

Mas, se $B = \{(1,1,0); (0,1,0)\}$ (base de S), então

$$pr_{(1,1,0)} v + pr_{(0,1,0)} v = \frac{3}{2}(1,1,0) + \frac{2}{1}(0,1,0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 0\right) \neq pr_S v$$

$\boxed{\text{(III) F}}$, pois $pr_{\lambda v} w = \left(\frac{\langle w, \lambda v\rangle}{\|\lambda v\|^2}\right)(\lambda v) = \left(\frac{\lambda \langle w, v\rangle}{\lambda^2 \|v\|^2}\right) \cdot (\lambda v) =$

$$= \left(\frac{\langle w, v\rangle}{\|v\|^2}\right) v = pr_v w \neq \lambda \cdot pr_v w, \text{ por exemplo,}$$

para $\lambda = 2$.

---

2 $x = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in S^\perp \iff \begin{cases} 0 = \langle x, (2,1,-1,2)\rangle = 2\alpha + \beta - \gamma + 2\delta \\ 0 = \langle x, (-1,2,-2,-1)\rangle = -\alpha + 2\beta - 2\gamma - \delta \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = \gamma \end{cases} \quad \therefore\ x \in S^\perp \iff (\exists\, \gamma, \delta \in \mathbb{R})\ x = (-\delta, \gamma, \gamma, \delta)$

$\therefore\ B = \{(-1,0,0,1); (0,1,1,0)\}$ é base ORTOGONAL de $S^\perp$.

Logo, $w = pr_{S^\perp}(6,-4,2,2) = pr_{(-1,0,0,1)}(6,-4,2,2) + pr_{(0,1,1,0)}(6,-4,2,2) =$

$$\therefore\ w = \frac{-4}{2}(-1,0,0,1) + \frac{-2}{2}(0,1,1,0) = \boxed{(2,-1,-1,-2)}$$

Logo, $a+b+c+d = \boxed{-2}$

Q3. Considere a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle p, q \rangle = p'(0)q'(0) + p'(1)q'(1) + p'(2)q'(2) + p'(3)q'(3), \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}).$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existem $p, q \in P_3(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $\langle \lambda p, q \rangle \neq \lambda \langle p, q \rangle$;

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existe $p \in P_3(\mathbb{R})$ não nulo tal que $\langle p, p \rangle = 0$;

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(d) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existem $p, q \in P_3(\mathbb{R})$ tais que $\langle p, q \rangle \neq \langle q, p \rangle$;

(e) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existem $p, q, r \in P_3(\mathbb{R})$ tais que $\langle p + q, r \rangle \neq \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle$.

Q4. Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt, \quad p, q \in P(\mathbb{R}).$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $q(t) = a + bt$ é o elemento de $P_1(\mathbb{R})$ mais próximo de $p(t) = t^4$, então $a + b$ é igual a:

(a) $\frac{1}{5}$;

(b) $\frac{2}{5}$;

(c) $\frac{3}{5}$;

(d) $\frac{4}{5}$;

(e) 1.

---

(3) Seja $p(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. $\therefore p \neq 0$.

Mas $p'(t) = 0$, $\forall t$ $\therefore p' = 0$ $\therefore \langle p, p \rangle = 0$ (mas $p \neq 0$).

---

(4) $B = \{u_1, u_2\}$ é base de $P_1(\mathbb{R})$, onde $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Logo, se $q(t) = a + bt$, $q = \mathrm{pr}_{P_1(\mathbb{R})}\, p$ e $\therefore$ temos:

$$(*) : \begin{cases} \langle u_1, u_1 \rangle a + \langle u_1, u_2 \rangle b = \langle u_1, p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle a + \langle u_2, u_2 \rangle b = \langle u_2, p \rangle \end{cases}$$

Agora, $\langle u_1, u_1 \rangle = \int_0^1 dt = 1$; $\langle u_1, u_2 \rangle = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

$\langle u_2, u_2 \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$; $\langle u_1, p \rangle = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}$;

$\langle u_2, p \rangle = \int_0^1 t^5 dt = \frac{1}{6}$

$$\therefore (*) : \begin{cases} a + \frac{1}{2} b = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{3} b = \frac{1}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{-1}{5} \\ \text{e} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \therefore \boxed{a + b = \frac{3}{5}}$$

Q5. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v, w \in V$, vale que:
$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2);$$

(II) para quaisquer $v, w \in V$, vale que v é ortogonal a w se, e somente se, $\|v + w\| = \|v - w\|$;

(III) se S_1 e S_2 são subespaços de V tais que $S_1 \subset S_2$, então $S_1^\perp \subset S_2^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q6. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de $\mathbb{R}^4$. Suponha que $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ seja a base ortogonal obtida a partir de $\mathcal{B}$ pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram–Schmidt. Se $v_4 = (-1, 3, 1, 1)$ e $w_4 = (-2, 1, 0, 1)$, então $\text{proj}_{[w_1, w_2, w_3]} v_4$ é igual a:

(a) $(1, 1, 2, 1)$;
(b) $(2, 1, 1, 3)$;
(c) $(1, 2, 1, 0)$;
(d) $(-1, 2, -1, -4)$;
(e) $(0, 1, 1, -1)$.

5 $\boxed{\text{(I) V}}$ pois $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle =$

$= (\|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2) + (\|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2) =$

$= 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ #

$\boxed{\text{(II) V}}$ pois $\|v+w\| = \|v-w\| \iff \|v+w\|^2 = \|v-w\|^2 \iff$

$2\langle v, w\rangle = -2\langle v, w\rangle \iff \langle v, w\rangle = 0 \iff v \perp w.$ #

$\boxed{\text{(III) F}}$ Basta notar que se $S_1 = \{0\}$ e $S_2 = V$, $(V \neq \{0\})$ então $S_1^\perp = V$ e $S_2^\perp = \{0\}$. De modo que, neste caso, não se tem $S_1^\perp \subset S_2^\perp$.

---

6 Sabe-se que $w_4 = v_4 - \text{proj}_{[w_1, w_2, w_3]} v_4$.

Logo, $\text{proj}_{[w_1, w_2, w_3]} v_4 = v_4 - w_4 = (-1,3,1,1) - (-2,1,0,1) =$

$= (1, 2, 1, 0)$

Q7. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c+d & a-b \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$;
(b) T é injetora;
(c) $\dim(\mathrm{Im}(T)) < \dim(\mathrm{Ker}(T))$;
(d) T é sobrejetora;
(e) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

(7) $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ b - c = 0 \\ c + d = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ b - c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = -d \end{cases}; d \in \mathbb{R}$ $\therefore$ $p \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow (\exists d \in \mathbb{R})(\forall t \in \mathbb{R})$

$p(t) = -d - dt - dt^2 + dt^3 = d(-1 - t - t^2 + t^3)$

$\therefore$ $\mathrm{Ker}(T) = [-1 - t - t^2 + t^3)$ $\therefore$ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$.

Logo $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim P_3(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Ker}(T) = 4 - 1 = \boxed{3}$

Q8. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a - b + c - d, a - b, c - d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) T é sobrejetora;
(b) $\mathrm{Ker}(T) = [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)]$;
(c) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 3$;
(d) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$;
(e) $\mathrm{Im}(T) = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$.

(8) Sabemos que $\mathrm{Im}(T) = [T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$

$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 0)$; $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1, -1, 0)$; $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 1)$;

$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1, 0, -1)$.

Logo, $\mathrm{Im}(T) = [(1, 1, 0); (1, 0, 1)]$ #

Q9. Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (-x - 2y - 3z, x + 2y + 3z, 3x + 6y + 9z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) existe um vetor $v \neq 0$ em $\mathrm{Ker}(T) \cap W$;

(II) existe um vetor $v \neq 0$ em $\mathrm{Im}(T) \cap W$;

(III) $T(T(v)) = T(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(e) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.

Q10. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V. Se $v \in V$, $w \in S^\perp$ e $z \in S$ são vetores não nulos tais que $v = 4w + 7z$, então o vetor de S mais próximo de v é:

(a) $v - \mathrm{proj}_z\, v$;

(b) z;

(c) $\mathrm{proj}_w\, v$;

(d) $7z$;

(e) $-7z$.

9 $\boxed{\text{(I) V}}$ $T(1,0,0) = (-1,1,3)$; $T(0,1,0) = (-2,2,6) = 2\cdot(-1,1,3)$

$T(0,0,1) = (-3,3,9) = 3(-1,1,3)$.

$\therefore \mathrm{Im}(T) = [(-1,1,3)]$ $\therefore$ $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$ e $\dim \mathrm{Ker}(T) = 2$.

Agora, $\dim(\mathrm{Ker}(T) + W) \leq 3$, pois $\mathrm{Ker}(T) + W$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Logo $\dim(\mathrm{Ker}(T) \cap W) = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim W - \dim(\mathrm{Ker}(T) + W) =$

$= 2 + 2 - \dim(\mathrm{Ker}(T) + W) \geq 4 - 3 = 1 > 0$.

$\therefore (\exists\, v \neq 0)\ v \in \mathbb{R}^3,\ v \in \mathrm{Ker}(T) \cap W$ #

$\boxed{\text{II) F}}$ Basta tomar $W = [(0,1,0), (0,0,1)]$

Então $\dim W = 2$ e $W \cap \mathrm{Im}(T) = \{(0,0,0)\}$.

$\boxed{\text{(III) F}}$ Seja $v = (1,0,0)$. Então $T(v) = (-1,1,3)$.

e $T(T(v)) = T(-1,1,3) = (1-2-9, -1+2+9, -3+6+27)$

$\therefore T(-1,1,3) = (-10,10,30)$

$\therefore T(T(1,0,0)) \neq T(1,0,0)$.

10 $v = 7z + 4w$ $\therefore$ $v - 7z = 4w \in S^\perp$ e $7z \in S$

$\therefore$, por definição de proj. ortogonal,

$7z = \mathrm{proj}_S\, v$. E $\mathrm{proj}_S\, v$ é o vetor de S mais próximo de v.

Q11. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por:

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se

$$S = [2 + t - t^2, -3 + t^2]$$

e $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $1 + at + bt^2 \in S^{\perp}$, então $a + b$ é igual a:

(a) $\frac{1}{2}$;
(b) -4;
(c) $-\frac{1}{2}$;
(d) -2;
(e) $-\frac{3}{2}$.

Q12. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v, w \in V$, vale que $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ se, e somente se, v e w são linearmente dependentes;

(II) para quaisquer $v, w \in V$, vale que $|\langle v, w\rangle| = \|v\|\|w\|$ se, e somente se, $v = 0$ ou existe $\lambda \geq 0$ tal que $w = \lambda v$;

(III) para quaisquer $v, w \in V$ e qualquer subespaço S de V, vale que se $\langle v, w\rangle = 0$ e $w \in S^{\perp}$, então $v \in S$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

---

11 $1+at+bt^2 \in S^{\perp} \Leftrightarrow 0 = \langle 2+t-t^2, 1+at+bt^2\rangle =$
$= 0\cdot(1-a+b) + 2\cdot 1 + 2(1+a+b) = 2a+2b+4.$

e $0 = \langle -3+t^2, 1+at+bt^2\rangle = (-2)(1-a+b) + (-3)(1) +$
$+ (-2)(1+a+b) = -7-4b. \quad \therefore \boxed{b = \frac{-7}{4}}$ e

$a = -b-4 = \frac{7}{4} - \frac{8}{4} = \boxed{\frac{-1}{4}} \quad \therefore \boxed{a+b=-2}$

---

12 $\boxed{\text{(I) F}}$ Basta tomar $w = -v \neq 0$. ($\therefore v+w=0$).
Então, $\|v\| + \|w\| = \|v\| + \|-v\| = 2\|v\| \neq 0 = \|v+w\|$.

$\boxed{\text{(II) F}}$ Basta considerar $v \neq 0$ e $w = -v$.
Então, $|\langle v, w\rangle| = |\langle v, -v\rangle| = \|v\|^2 = \|v\|\cdot\|-v\| =$
$= \|v\|\cdot\|w\|.$

$\boxed{\text{(III) F}}$ Basta tomar $V = \mathbb{R}^3$; $\langle , \rangle$ = usual.
$S = [(1,0,0)]$ logo, $S^{\perp} = [(0,1,0), (0,0,1)]$
Assim sendo $v = (0,1,0)$ e $w = (0,0,1) \in S^{\perp}$
$0 = \langle v, w\rangle$, mas $v \notin S$.

Q13. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, S um subespaço de V e $v, w \in V$ tais que $v - w \in S$ e $w \in S^{\perp}$. Pode-se afirmar que:

(a) $\langle v, w \rangle = \|v\|$;

(b) $v = 0$;

(c) $\langle v, w \rangle = 0$;

(d) $\langle v, w \rangle = \|w\|^2$;

(e) $v \in S^{\perp}$.

Q14. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \to W$ uma transformação linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) se T é injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$;

(II) se $\dim(V) \leq \dim(W)$, então T é injetora;

(III) se T é sobrejetora, então $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

13

$v - w \in S$, $w \in S^{\perp}$ $\therefore 0 = \langle v-w, w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle w, w \rangle = \langle v, w \rangle - \|w\|^2$

$\therefore \langle v, w \rangle = \|w\|^2$ #

14

$\boxed{\text{(I) V}}$ pois $\dim V = \dim \underbrace{Ker(T)}_{\{0\}.\ (T \text{ é injetora})} + \dim(Im(T)) =$

$= 0 + \dim Im(T) \leq \dim W.$ #

$\boxed{\text{(II) F}}$ Basta notar que se $V \neq \{0\}$ e $T = 0$, T não é injetora. ~~[illegible]~~.

($T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $T = 0$, T não é injetora).

$\boxed{\text{(III) V}}$ pois $\dim V = \dim Ker(T) + \dim Im(T) \underset{T \text{ é sobrej.}}{=}$

$= \underbrace{\dim Ker(T)}_{\geq 0} + \dim W \geq \dim W.$ #

Q15. Sejam $n \geq 1$ um inteiro, V um espaço vetorial de dimensão n munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ não nulos e dois a dois distintos. Considere as seguintes afirmações:

(I) se o conjunto $\mathcal{B}$ é ortogonal, então $\mathcal{B}$ é uma base de V;

(II) se $\mathcal{B}$ é uma base de V, então o conjunto $\mathcal{B}$ é ortogonal;

(III) o conjunto $\mathcal{B}$ é ortogonal se, e somente se, a matriz

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

tem determinante positivo.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

15 $\boxed{\text{(I) V}}$. Mostremos que $\mathcal{B}$ é L.I. De fato, se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ são t.q. $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, então, $\forall j = 1, \ldots, n$.

$0 = \langle 0, v_j \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, v_j \rangle = \alpha_j \|v_j\|^2$

De modo que, como $v_j \neq 0$, $\alpha_j = 0$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

Ademais, $\mathcal{B}$ tem $\underline{n}$ elementos e $n = \dim V$.

$\therefore$ $\mathcal{B}$ é conjunto de geradores de V.

$\therefore$ $\mathcal{B}$ é base de V. $\#$

$\boxed{\text{(II) F}}$ Basta tomar $V = \mathbb{R}^2$; $\langle , \rangle$ = usual.

$\mathcal{B} = \{(1,1); (0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, mas <u>não</u> é ortogonal. $(\langle (1,1), (0,1) \rangle = 1 \neq 0)$.

$\boxed{\text{(III) F}}$. O mesmo exemplo considerado em (II) serve.

$\langle (1,1), (1,1) \rangle = 2$; $\langle (1,1), (0,1) \rangle = 1$;

$\langle (0,1), (0,1) \rangle = 1$. $\mathcal{B}$ <u>não</u> é ortogonal.

mas $\det \begin{pmatrix} \langle (1,1), (1,1) \rangle & \langle (1,1), (1,0) \rangle \\ \langle (0,1), (1,1) \rangle & \langle (0,1), (0,1) \rangle \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$

Q16. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 2 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que

$$T(T(v)) = 0,$$

para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$;

(II) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$;

(III) $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

(16) $T \neq 0 \Rightarrow (\exists e \in V)\ T(e) \neq 0.$

Logo, $T(e) \in \mathrm{Im}(T)$ $\therefore$ $\dim \mathrm{Im}(T) \geq 1$.

De outra parte, $T(e) \neq 0$ e $T(T(e)) = 0$.

$\therefore$ $T(e) \neq 0$ e $T(e) \in \mathrm{Ker}(T)$

$\therefore \dim \mathrm{Ker}(T) \geq 1$

Mas $\dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim V = 2$.

Logo, $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1 = \dim \mathrm{Im}(T)$.

Por fim, se $y \in \mathrm{Im}(T)$, $(\exists v \in V)$ $y = T(v)$.

Daí, $T(y) = T(T(v)) = 0$, $\forall y \in \mathrm{Im}(T)$.

$\therefore$ $y \in \mathrm{Ker}(T)$, $\forall y \in \mathrm{Im}(T)$.

$\therefore$ $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$.

Dado que têm a mesma dimensão, segue que $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T)$.

$\therefore \boxed{(I)\ V}$; $\boxed{(II)\ F}$ e $\boxed{(III)\ V}$