Q1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e os vetores:

$$v_1 = (1, -1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1, -2), \quad v_3 = (2, 1, -1, 1) \text{ e } v_4 = (1, 1, 1, 1).$$

Aplicando-se o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt ao conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, obtemos o conjunto ortogonal $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Temos que a soma das coordenadas do vetor w_4 é igual a:

(a) $\frac{12}{7}$;
(b) 4;
(c) 3;
(d) $\frac{9}{7}$;
(e) $\frac{6}{7}$.

Q2. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e considere a quádrica de equação:

$$x^2 + y^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 3x - y + z + 1 = 0.$$

Sabendo-se que $P^{-1}AP = D$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que uma equação reduzida para essa quádrica é:

(a) $4u^2 - 2v^2 + \sqrt{2}\,w = 0$;
(b) $2u^2 - v^2 + \frac{13}{16} = 0$;
(c) $2u^2 - v^2 - 2\sqrt{2}\,w = 0$;
(d) $4u^2 - 2v^2 + \frac{13}{16} = 0$;
(e) $2u^2 - v^2 + \sqrt{2}\,w = 0$.

Q3. Considere as bases
$$\mathcal{B} = \{(2,3),(1,2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(0,1)\}$$
de $\mathbb{R}^2$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$
Temos que a soma dos dois autovalores de T é igual a:

(a) 7;
(b) 5;
(c) 6;
(d) 8;
(e) 4.

Q4. Se
$$A = \begin{pmatrix} -3i & -4i \\ 2i & 3i \end{pmatrix},$$
então A^{80} é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 2^{80} & 0 \\ 0 & 3^{80} \end{pmatrix}$;
(b) $\begin{pmatrix} 3^{80} & 4^{80} \\ 2^{80} & 3^{80} \end{pmatrix}$;
(c) $\begin{pmatrix} 0 & i2^{80} \\ -i2^{80} & 0 \end{pmatrix}$;
(d) $\begin{pmatrix} i2^{80} & -i \\ 1 & i3^{80} \end{pmatrix}$;
(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q5. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:
$$S = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : -3x - 2y + z = 0 \text{ e } -5x - 3y + t = 0\big\}.$$
Temos que $S^\perp$ é igual a:

(a) $[(1,1,0,0),(2,1,1,0)]$;
(b) $[(-3,-2,1,0),(-5,-3,0,1)]$;
(c) $[(-3,-2,1,0)]$;
(d) $[(-5,-3,0,1)]$;
(e) $[(2,0,0,-1),(1,0,0,1)]$.

Q6. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{1+t, 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dos espaços vetoriais $P_1(\mathbb{R})$ e $M_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Se

$$T : P_1(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

for a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

então $T(t)$ será igual a:

(a) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

Q7. Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear e existir uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal, então o operador T será simétrico;

(II) para qualquer inteiro positivo n e qualquer matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$, se as colunas de P formarem uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ com respeito ao produto interno usual, então $P^{\mathrm{t}}P$ será igual à matriz identidade, em que P^{t} denota a transposta da matriz P;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será simétrica, em que I denota o operador identidade de V.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $[T]_{\mathrm{can}} = A$, em que can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que

$$\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = [(1,1,1)], \quad \mathrm{Ker}(T - 3\mathrm{I}) = [(-1,4,3)]$$
$$\text{e} \quad \mathrm{Ker}(T + 2\mathrm{I}) = [(3,3,-4)],$$

em que I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Se $X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ denota a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (-1,4,-4)$, então $x(t) + y(t) + z(t)$ é igual a:

(a) $9e^{5t} - 6e^{3t} - 4e^{-2t}$;
(b) $-9e^{5t} + 6e^{3t} + 2e^{-2t}$;
(c) $-9e^{5t} + e^{3t} + 7e^{-2t}$;
(d) $-3e^{5t} + 5e^{3t} - 3e^{-2t}$;
(e) $3e^{5t} + 2e^{3t} - 6e^{-2t}$.

Q9. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e que a matriz $P^{-1}AP$ é diagonal, temos que a soma das duas entradas na primeira coluna da matriz A^{47} é igual a:

(a) $2^{48} - 3^{49}$;
(b) $2^{47} + 3^{47}$;
(c) $3 \cdot 2^{49} + 2 \cdot 3^{48}$;
(d) $2^{49} - 3^{48}$;
(e) $-2^{48} + 2 \cdot 3^{49}$.

Q10. Seja $\big(x(t), y(t)\big)$ a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t), \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$. Temos que $x(t) + y(t)$ é igual a:

(a) e^{2t};
(b) $e^{2t}(3 \operatorname{sen} t + \cos t)$;
(c) $e^{2t}(\cos t - \operatorname{sen} t)$;
(d) $e^{2t}(\operatorname{sen} t + \cos t)$;
(e) $\cos t + \operatorname{sen} t$.

Q11. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base

$$\mathcal{B} = \{(2,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa correta:

(a) T é simétrico;
(b) T é diagonalizável e não é simétrico;
(c) existe uma base ortonormal $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal;
(d) T é diagonalizável e não é inversível;
(e) T não é diagonalizável.

Q12. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a transformação linear $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & a & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -a & b & -2 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $P_3(\mathbb{R})$ dada por $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Pode-se afirmar que:

(a) se $a = -1$ e $b \neq 0$, então $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$;
(b) se $a \neq -1$ e $b = -\frac{1}{3}(4a^2 + 5a + 1)$, então $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$;
(c) se $a = -1$ e $b = 0$, então T é inversível;
(d) se $a = -\frac{1}{4}$ e $b \neq 0$, então $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$;
(e) se $b \neq -\frac{1}{3}(4a^2 + 5a + 1)$, então T é inversível.

Q13. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 13 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -t^8(t-1)^3(t-2)^2.$$

Denote por I o operador identidade de V. Assinale a alternativa contendo uma igualdade que **NÃO** implique que T seja diagonalizável:

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})\big) = 13$;
(b) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T - \mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T - 2\mathrm{I})\big) = 24$;
(c) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T - \mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T - 2\mathrm{I})\big) = 26$;
(d) $\dim\big(\mathrm{Im}(T - \mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T - 2\mathrm{I})\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 13$;
(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(T - 2\mathrm{I})\big) = 0$.

Q14. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2,$$

para quaisquer $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$. Se $x, y, z \in \mathbb{R}$ forem tais que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

seja a matriz simétrica mais próxima da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

então $y + z$ será igual a:

(a) 4;
(b) 8;
(c) $\frac{9}{2}$;
(d) $\frac{13}{2}$;
(e) $\frac{11}{2}$.

Q15. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}.$$

Se o polinômio característico de A for $p_A(t) = -t^3 + 4t + 1$, então:

(a) $a = 1$ e $b = 0$;
(b) $a = -1$ e $b = 0$;
(c) $a = 0$ e $b = 1$;
(d) $a = 1$ e $b = -1$;
(e) $a = 2$ e $b = 1$.

Q16. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b^2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) se $b \neq 0$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$;

(b) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$;

(c) se $b \neq 0$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(d) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se, e somente se, $a \neq 2$ e $b \neq 2$;

(e) se $a = b$, então A não é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.