

Q1. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{1 + t, 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dos espaços vetoriais $P_1(\mathbb{R})$ e $M_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Se

$$T : P_1(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

for a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

então $T(t)$ será igual a:

- (a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$;
- (b) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$;
- (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;
- (d) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;
- (e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Q2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}.$$

Se o polinômio característico de A for $p_A(t) = -t^3 + 4t + 1$, então:

- (a) $a = 2$ e $b = 1$;
- (b) $a = 1$ e $b = 0$;
- (c) $a = -1$ e $b = 0$;
- (d) $a = 1$ e $b = -1$;
- (e) $a = 0$ e $b = 1$.

Q3. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

em que \mathcal{B} denota a base

$$\mathcal{B} = \{(2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

de \mathbb{R}^3 . Assinale a alternativa correta:

- (a) existe uma base ortonormal \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 tal que a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal;
- (b) T é simétrico;
- (c) T é diagonalizável e não é inversível;
- (d) T é diagonalizável e não é simétrico;
- (e) T não é diagonalizável.

Q4. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \rightarrow V$ for um operador linear e existir uma base ortonormal \mathcal{B} de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal, então o operador T será simétrico;
- (II) para qualquer inteiro positivo n e qualquer matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$, se as colunas de P formarem uma base ortonormal de \mathbb{R}^n com respeito ao produto interno usual, então $P^t P$ será igual à matriz identidade, em que P^t denota a transposta da matriz P ;
- (III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e se \mathcal{B} e \mathcal{C} forem bases ortonormais de V , então a matriz $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ será simétrica, em que I denota o operador identidade de V .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q5. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2,$$

para quaisquer $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Se $x, y, z \in \mathbb{R}$ forem tais que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

seja a matriz simétrica mais próxima da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

então $y + z$ será igual a:

- (a) $\frac{13}{2}$;
- (b) $\frac{11}{2}$;
- (c) $\frac{9}{2}$;
- (d) 4;
- (e) 8.

Q6. Seja $(x(t), y(t))$ a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t), \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$. Temos que $x(t) + y(t)$ é igual a:

- (a) e^{2t} ;
- (b) $\cos t + \sen t$;
- (c) $e^{2t}(\cos t - \sen t)$;
- (d) $e^{2t}(\sen t + \cos t)$;
- (e) $e^{2t}(3 \sen t + \cos t)$.

Q7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a transformação linear $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & a & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -a & b & -2 \end{pmatrix},$$

em que \mathcal{B} é a base de $P_3(\mathbb{R})$ dada por $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Pode-se afirmar que:

- (a) se $a \neq -1$ e $b = -\frac{1}{3}(4a^2 + 5a + 1)$, então $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$;
- (b) se $a = -1$ e $b \neq 0$, então $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$;
- (c) se $a = -\frac{1}{4}$ e $b \neq 0$, então $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$;
- (d) se $b \neq -\frac{1}{3}(4a^2 + 5a + 1)$, então T é inversível;
- (e) se $a = -1$ e $b = 0$, então T é inversível.

Q8. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com \mathcal{B} uma base ortonormal, e considere a quádrlica de equação:

$$x^2 + y^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 3x - y + z + 1 = 0.$$

Sabendo-se que $P^{-1}AP = D$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que uma equação reduzida para essa quádrlica é:

- (a) $2u^2 - v^2 - 2\sqrt{2}w = 0$;
- (b) $4u^2 - 2v^2 + \sqrt{2}w = 0$;
- (c) $2u^2 - v^2 + \sqrt{2}w = 0$;
- (d) $2u^2 - v^2 + \frac{13}{16} = 0$;
- (e) $4u^2 - 2v^2 + \frac{13}{16} = 0$.

Q9. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço de \mathbb{R}^4 definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -3x - 2y + z = 0 \text{ e } -5x - 3y + t = 0\}.$$

Temos que S^\perp é igual a:

- (a) $[(1, 1, 0, 0), (2, 1, 1, 0)]$;
- (b) $[(-5, -3, 0, 1)]$;
- (c) $[(-3, -2, 1, 0)]$;
- (d) $[(-3, -2, 1, 0), (-5, -3, 0, 1)]$;
- (e) $[(2, 0, 0, -1), (1, 0, 0, 1)]$.

Q10. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e que a matriz $P^{-1}AP$ é diagonal, temos que a soma das duas entradas na primeira coluna da matriz A^{47} é igual a:

- (a) $2^{48} - 3^{49}$;
- (b) $2^{49} - 3^{48}$;
- (c) $3 \cdot 2^{49} + 2 \cdot 3^{48}$;
- (d) $-2^{48} + 2 \cdot 3^{49}$;
- (e) $2^{47} + 3^{47}$.

Q11. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b^2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) se $b \neq 0$, então A é diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (b) se $b \neq 0$, então A é diagonalizável sobre \mathbb{R} ;
- (c) se $a = b$, então A não é diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (d) A é diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (e) A é diagonalizável sobre \mathbb{C} se, e somente se, $a \neq 2$ e $b \neq 2$.

Q12. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(2, 3), (1, 2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1, 1), (0, 1)\}$$

de \mathbb{R}^2 e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos dois autovalores de T é igual a:

- (a) 8;
- (b) 4;
- (c) 5;
- (d) 6;
- (e) 7.

Q13. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual e os vetores:

$$v_1 = (1, -1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1, -2), \quad v_3 = (2, 1, -1, 1) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1).$$

Aplicando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt ao conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, obtemos o conjunto ortogonal $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Temos que a soma das coordenadas do vetor w_4 é igual a:

- (a) $\frac{9}{7}$;
- (b) 4;
- (c) 3;
- (d) $\frac{12}{7}$;
- (e) $\frac{6}{7}$.

Q14. Se

$$A = \begin{pmatrix} -3i & -4i \\ 2i & 3i \end{pmatrix},$$

então A^{80} é igual a:

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & i2^{80} \\ -i2^{80} & 0 \end{pmatrix}$;
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (c) $\begin{pmatrix} i2^{80} & -i \\ 1 & i3^{80} \end{pmatrix}$;
- (d) $\begin{pmatrix} 3^{80} & 4^{80} \\ 2^{80} & 3^{80} \end{pmatrix}$;
- (e) $\begin{pmatrix} 2^{80} & 0 \\ 0 & 3^{80} \end{pmatrix}$.

Q15. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 13 e $T : V \rightarrow V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -t^8(t-1)^3(t-2)^2.$$

Denote por I o operador identidade de V . Assinale a alternativa contendo uma igualdade que **NÃO** implique que T seja diagonalizável:

- (a) $\dim(\text{Im}(T - I)) + \dim(\text{Im}(T - 2I)) - \dim(\text{Ker}(T)) = 13$;
- (b) $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Ker}(T - I)) - \dim(\text{Im}(T - 2I)) = 0$;
- (c) $\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Im}(T - I)) + \dim(\text{Im}(T - 2I)) = 26$;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Ker}(T - I)) + \dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 13$;
- (e) $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T - I)) + \dim(\text{Im}(T - 2I)) = 24$.

Q16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $[T]_{\text{can}} = A$, em que can denota a base canônica de \mathbb{R}^3 e:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T - 5\text{I}) &= [(1, 1, 1)], & \text{Ker}(T - 3\text{I}) &= [(-1, 4, 3)] \\ \text{e } \text{Ker}(T + 2\text{I}) &= [(3, 3, -4)], \end{aligned}$$

em que I denota o operador identidade de \mathbb{R}^3 . Se $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ denota a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (-1, 4, -4)$, então $x(t) + y(t) + z(t)$ é igual a:

- (a) $-9e^{5t} + 6e^{3t} + 2e^{-2t}$;
- (b) $9e^{5t} - 6e^{3t} - 4e^{-2t}$;
- (c) $-3e^{5t} + 5e^{3t} - 3e^{-2t}$;
- (d) $3e^{5t} + 2e^{3t} - 6e^{-2t}$;
- (e) $-9e^{5t} + e^{3t} + 7e^{-2t}$.