Q1. Sejam V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$. Assinale a alternativa correta:

(a) vale necessariamente que $T \circ T = T$;

(b) vale necessariamente que $T \circ T = 0$ e $T \neq 0$;

(c) é possível que $\dim(V) = 5$;

(d) vale necessariamente que $V = \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)$;

(e) vale necessariamente que $T = 0$.

Q2. Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{C}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(2,-1)$ é igual a:

(a) $(-1,-7,-7)$;

(b) $(3,-3,-1)$;

(c) $(3,-5,-1)$;

(d) $(5,-7,-7)$;

(e) $(5,-1,-7)$.

Q3. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c+d & a-b \end{pmatrix},$$

para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$;

(b) T é sobrejetora;

(c) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$;

(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$;

(e) T é injetora.

Q4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$T(1,0,0) = 1+3t+t^2, \quad T(1,2,0) = 1+t+3t^2 \quad$ e $\quad T(1,2,3) = 1+at+bt^2.$

Temos que T será injetora se, e somente se:

(a) $a + b = 4$;
(b) $a + b \neq 4$;
(c) $a - b \neq 2$;
(d) $a \neq b$;
(e) $a - b = 2$.

Q5. Sejam n um inteiro positivo, V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ uma transformação linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) T será injetora se, e somente se, T for sobrejetora;
(II) T será injetora se, e somente se, $T \circ T$ for injetora;
(III) se $\mathcal{B}$ for uma base do espaço vetorial V, então a dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$ coincidirá com a dimensão do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q6. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sejam $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ definidas por

$$f_1(t) = \operatorname{sen}(2t), \quad f_2(t) = \cos(2t) \quad \text{e} \quad f_3(t) = e^{-t},$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

é uma base do subespaço vetorial V de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gerado por $\mathcal{B}$. Se $T : V \to V$ for a transformação linear definida por

$$T(f) = f',$$

para qualquer $f \in V$, então $[T]_{\mathcal{B}}$ será igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Q7. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$T(1-2t) = (1,1,0), \quad T(2+t^2) = (1,0,1) \quad \text{e} \quad T(3t-t^2) = (0,1,1).$$

Temos que $T(7+7t+7t^2)$ é igual a:

(a) $(1, 6, -5)$;
(b) $(-1, -6, -5)$;
(c) $(-1, -6, 5)$;
(d) $(-1, 6, -5)$;
(e) $(1, -6, 5)$.

Q8. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d,$$

para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

(I) T é injetora;

(II) $\mathrm{Ker}(T)$ é gerado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(III) o subespaço vetorial

$$\left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} A \right\}$$

de $M_2(\mathbb{R})$ está contido em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(\alpha + \beta t + \gamma t^2) = \alpha + \beta - (\alpha + \gamma)t + (\alpha a + \gamma b)t^2,$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) T será sobrejetora se, e somente se, $a < b$;
(b) T será bijetora se, e somente se, $a = b$;
(c) T será injetora se, e somente se, $a > b$;
(d) T será injetora se, e somente se, $a \neq b$;
(e) T será sobrejetora se, e somente se, $a^2 = b^2$.

Q10. Seja $T : P_5(\mathbb{R}) \to P_5(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(p) = p + p',$$

para qualquer $p \in P_5(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\bigl(\mathrm{Ker}(T)\bigr) = 4$;
(b) $\dim\bigl(\mathrm{Ker}(T)\bigr) = 1$;
(c) T é bijetora;
(d) $\dim\bigl(\mathrm{Ker}(T)\bigr) = 2$;
(e) $\dim\bigl(\mathrm{Ker}(T)\bigr) = 3$.

Q11. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C}$ denota a base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\mathcal{C} = \bigl\{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\bigr\}.$$

Temos que $T(-1,2)$ é igual a:

(a) $(-1,-3,11)$;
(b) $(1,4,-7)$;
(c) $(-1,3,7)$;
(d) $(1,5,-2)$;
(e) $(-1,0,7)$.

Q12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que:

$$\mathrm{Ker}(T) = [(1,2,-1), (-1,1,1)] \quad \text{e} \quad T(2,1,1) = (4,2,2).$$

Sabe-se que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ forem tais que $T(a,b,c) = (x,y,z)$, então $x + y + z$ será igual a:

(a) $\frac{2}{3}(a+b+c)$;
(b) $\frac{8}{3}(a+c)$;
(c) $\frac{1}{3}(-a+c)$;
(d) $\frac{4}{3}(2a+b-c)$;
(e) $3(a-b+c)$.

Q13. Considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}$$

e denote por $\mathcal{C}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ forem tais que

$$[T + S^{-1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então $a + b + c + d$ será igual a:

(a) 9;
(b) 8;
(c) 3;
(d) 5;
(e) 6.

Q14. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear $T : P_6(\mathbb{R}) \to P_6(\mathbb{R})$ tal que:

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T);$$

(II) se V for um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$, então:

$$V = \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T);$$

(III) existe uma transformação linear bijetora $T : P_8(\mathbb{R}) \to M_{4\times 2}(\mathbb{R})$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são falsas;
(d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q15. Considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dada por
$$\mathcal{B} = \{(1,2),(0,1)\}$$
e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:
$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Denote por $\mathcal{C}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se
$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
então $a+d$ e $b+c$ serão iguais respectivamente a:

(a) -2 e 4;
(b) 2 e -8;
(c) 2 e -4;
(d) 2 e -2;
(e) -2 e 8.

Q16. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por
$$T(p) = \big(p'(1), p(0)+p(-1), p(0)+p'(0)\big),$$
para qualquer $p \in P_3(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;
(b) se $b, c, d \in \mathbb{R}$ forem tais que $7t^3 + bt^2 + ct + d$ pertença ao núcleo de T, então $b+c+d$ será igual a -8;
(c) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$;
(d) T é bijetora;
(e) se $b, c, d \in \mathbb{R}$ forem tais que $7t^3 + bt^2 + ct + d$ pertença ao núcleo de T, então $b+c+d$ será igual a 0.