

Q1. Sejam n um inteiro positivo, V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) T será injetora se, e somente se, T for sobrejetora;
- (II) T será injetora se, e somente se, $T \circ T$ for injetora;
- (III) se \mathcal{B} for uma base do espaço vetorial V , então a dimensão de $\text{Ker}(T)$ coincidirá com a dimensão do subespaço vetorial de \mathbb{R}^n gerado pelas linhas da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q2. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d,$$

para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) T é injetora;
- (II) $\text{Ker}(T)$ é gerado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- (III) o subespaço vetorial

$$\left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} A \right\}$$

de $M_2(\mathbb{R})$ está contido em $\text{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q3. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a + d & b - c \\ c + d & a - b \end{pmatrix},$$

para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- (a) T é injetora;
- (b) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$;
- (c) T é sobrejetora;
- (d) $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$;
- (e) $\dim(\text{Im}(T)) = 3$.

Q4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que:

$$\text{Ker}(T) = [(1, 2, -1), (-1, 1, 1)] \quad \text{e} \quad T(2, 1, 1) = (4, 2, 2).$$

Sabe-se que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ forem tais que $T(a, b, c) = (x, y, z)$, então $x + y + z$ será igual a:

- (a) $\frac{1}{3}(-a + c)$;
- (b) $\frac{2}{3}(a + b + c)$;
- (c) $\frac{4}{3}(2a + b - c)$;
- (d) $3(a - b + c)$;
- (e) $\frac{8}{3}(a + c)$.

Q5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

em que \mathcal{B} denota a base canônica de \mathbb{R}^2 e \mathcal{C} denota a base de \mathbb{R}^3 dada por:

$$\mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}.$$

Temos que $T(-1, 2)$ é igual a:

- (a) $(-1, -3, 11)$;
- (b) $(1, 4, -7)$;
- (c) $(-1, 0, 7)$;
- (d) $(1, 5, -2)$;
- (e) $(-1, 3, 7)$.

Q6. Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$$

de \mathbb{R}^2 e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

em que \mathcal{C} denota a base canônica de \mathbb{R}^3 . Temos que $T(2, -1)$ é igual a:

- (a) $(5, -7, -7)$;
- (b) $(-1, -7, -7)$;
- (c) $(3, -3, -1)$;
- (d) $(5, -1, -7)$;
- (e) $(3, -5, -1)$.

Q7. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sejam $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definidas por

$$f_1(t) = \sin(2t), \quad f_2(t) = \cos(2t) \quad \text{e} \quad f_3(t) = e^{-t},$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

é uma base do subespaço vetorial V de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gerado por \mathcal{B} . Se $T : V \rightarrow V$ for a transformação linear definida por

$$T(f) = f',$$

para qualquer $f \in V$, então $[T]_{\mathcal{B}}$ será igual a:

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- (b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- (c) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- (d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- (e) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Q8. Seja $T : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow P_5(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(p) = p + p',$$

para qualquer $p \in P_5(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- (a) T é bijetora;
- (b) $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$;
- (c) $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$;
- (e) $\dim(\text{Ker}(T)) = 4$.

Q9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(\alpha + \beta t + \gamma t^2) = \alpha + \beta - (\alpha + \gamma)t + (\alpha a + \gamma b)t^2,$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- (a) T será sobrejetora se, e somente se, $a^2 = b^2$;
- (b) T será injetora se, e somente se, $a > b$;
- (c) T será injetora se, e somente se, $a \neq b$;
- (d) T será sobrejetora se, e somente se, $a < b$;
- (e) T será bijetora se, e somente se, $a = b$.

Q10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1, 0, 0) = 1 + 3t + t^2, \quad T(1, 2, 0) = 1 + t + 3t^2 \quad \text{e} \quad T(1, 2, 3) = 1 + at + bt^2.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- (a) $a \neq b$;
- (b) $a + b \neq 4$;
- (c) $a - b = 2$;
- (d) $a - b \neq 2$;
- (e) $a + b = 4$.

Q11. Considere a base \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 dada por

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (0, 1)\}$$

e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denote por \mathcal{C} a base canônica de \mathbb{R}^2 . Se

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então $a + d$ e $b + c$ serão iguais respectivamente a:

- (a) 2 e -4 ;
- (b) 2 e -8 ;
- (c) 2 e -2 ;
- (d) -2 e 4;
- (e) -2 e 8.

Q12. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$T(1 - 2t) = (1, 1, 0), \quad T(2 + t^2) = (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad T(3t - t^2) = (0, 1, 1).$$

Temos que $T(7 + 7t + 7t^2)$ é igual a:

- (a) $(-1, 6, -5)$;
- (b) $(-1, -6, 5)$;
- (c) $(1, -6, 5)$;
- (d) $(-1, -6, -5)$;
- (e) $(1, 6, -5)$.

Q13. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(p) = (p'(1), p(0) + p(-1), p(0) + p'(0)),$$

para qualquer $p \in P_3(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- (a) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (b) se $b, c, d \in \mathbb{R}$ forem tais que $7t^3 + bt^2 + ct + d$ pertença ao núcleo de T , então $b + c + d$ será igual a 0;
- (c) se $b, c, d \in \mathbb{R}$ forem tais que $7t^3 + bt^2 + ct + d$ pertença ao núcleo de T , então $b + c + d$ será igual a -8 ;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$;
- (e) T é bijetora.

Q14. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear $T : P_6(\mathbb{R}) \rightarrow P_6(\mathbb{R})$ tal que:

$$\text{Ker}(T) = \text{Im}(T);$$

(II) se V for um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ for uma transformação linear tal que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$, então:

$$V = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T);$$

(III) existe uma transformação linear bijetora $T : P_8(\mathbb{R}) \rightarrow M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) todas as afirmações são falsas;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Q15. Sejam V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$. Assinale a alternativa correta:

- (a) é possível que $\dim(V) = 5$;
- (b) vale necessariamente que $V = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$;
- (c) vale necessariamente que $T \circ T = 0$ e $T \neq 0$;
- (d) vale necessariamente que $T \circ T = T$;
- (e) vale necessariamente que $T = 0$.

Q16. Considere a base \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 dada por

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}$$

e denote por \mathcal{C} a base canônica de \mathbb{R}^2 . Sejam $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ forem tais que

$$[T + S^{-1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então $a + b + c + d$ será igual a:

- (a) 3;
- (b) 6;
- (c) 8;
- (d) 9;
- (e) 5.