

**Q1.** Sejam  $V$  um espaço vetorial não nulo de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  uma transformação linear tal que  $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$ . Assinale a alternativa correta:

- (a) vale necessariamente que  $T = 0$ ;
- (b) vale necessariamente que  $V = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$ ;
- (c) vale necessariamente que  $T \circ T = T$ ;
- (d) vale necessariamente que  $T \circ T = 0$  e  $T \neq 0$ ;
- (e) é possível que  $\dim(V) = 5$ .

**Q2.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear tal que:

$$\text{Ker}(T) = [(1, 2, -1), (-1, 1, 1)] \quad \text{e} \quad T(2, 1, 1) = (4, 2, 2).$$

Sabe-se que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  e  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  forem tais que  $T(a, b, c) = (x, y, z)$ , então  $x + y + z$  será igual a:

- (a)  $\frac{4}{3}(2a + b - c)$ ;
- (b)  $\frac{1}{3}(-a + c)$ ;
- (c)  $\frac{2}{3}(a + b + c)$ ;
- (d)  $\frac{8}{3}(a + c)$ ;
- (e)  $3(a - b + c)$ .

**Q3.** Seja  $T : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow P_5(\mathbb{R})$  a transformação linear definida por

$$T(p) = p + p',$$

para qualquer  $p \in P_5(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ ;
- (b)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$ ;
- (c)  $T$  é bijetora;
- (d)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 4$ ;
- (e)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ .

**Q4.** Sejam  $n$  um inteiro positivo,  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  e  $T : V \rightarrow V$  uma transformação linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T$  será injetora se, e somente se,  $T$  for sobrejetora;
- (II)  $T$  será injetora se, e somente se,  $T \circ T$  for injetora;
- (III) se  $\mathcal{B}$  for uma base do espaço vetorial  $V$ , então a dimensão de  $\text{Ker}(T)$  coincidirá com a dimensão do subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$  gerado pelas linhas da matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

**Q5.** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p'(1), p(0) + p(-1), p(0) + p'(0)),$$

para qualquer  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ ;
- (b) se  $b, c, d \in \mathbb{R}$  forem tais que  $7t^3 + bt^2 + ct + d$  pertença ao núcleo de  $T$ , então  $b + c + d$  será igual a 0;
- (c)  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ ;
- (d) se  $b, c, d \in \mathbb{R}$  forem tais que  $7t^3 + bt^2 + ct + d$  pertença ao núcleo de  $T$ , então  $b + c + d$  será igual a  $-8$ ;
- (e)  $T$  é bijetora.

**Q6.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  a transformação linear tal que:

$$T(1, 0, 0) = 1 + 3t + t^2, \quad T(1, 2, 0) = 1 + t + 3t^2 \quad \text{e} \quad T(1, 2, 3) = 1 + at + bt^2.$$

Temos que  $T$  será injetora se, e somente se:

- (a)  $a - b \neq 2$ ;
- (b)  $a + b \neq 4$ ;
- (c)  $a \neq b$ ;
- (d)  $a - b = 2$ ;
- (e)  $a + b = 4$ .

**Q7.** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{C}$  denota a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Temos que  $T(2, -1)$  é igual a:

- (a)  $(5, -7, -7)$ ;
- (b)  $(3, -5, -1)$ ;
- (c)  $(3, -3, -1)$ ;
- (d)  $(-1, -7, -7)$ ;
- (e)  $(5, -1, -7)$ .

**Q8.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  denota a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathcal{C}$  denota a base de  $\mathbb{R}^3$  dada por:

$$\mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}.$$

Temos que  $T(-1, 2)$  é igual a:

- (a)  $(1, 4, -7)$ ;
- (b)  $(-1, 0, 7)$ ;
- (c)  $(-1, -3, 11)$ ;
- (d)  $(-1, 3, 7)$ ;
- (e)  $(1, 5, -2)$ .

**Q9.** Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear  $T : P_6(\mathbb{R}) \rightarrow P_6(\mathbb{R})$  tal que:

$$\text{Ker}(T) = \text{Im}(T);$$

(II) se  $V$  for um espaço vetorial de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear tal que  $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$ , então:

$$V = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T);$$

(III) existe uma transformação linear bijetora  $T : P_8(\mathbb{R}) \rightarrow M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) todas as afirmações são falsas;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Q10.** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a + d & b - c \\ c + d & a - b \end{pmatrix},$$

para quaisquer  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ ;
- (b)  $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$ ;
- (c)  $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ ;
- (d)  $T$  é sobrejetora;
- (e)  $T$  é injetora.

**Q11.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e considere a transformação linear  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  definida por

$$T(\alpha + \beta t + \gamma t^2) = \alpha + \beta - (\alpha + \gamma)t + (\alpha a + \gamma b)t^2,$$

para quaisquer  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $T$  será sobrejetora se, e somente se,  $a < b$ ;
- (b)  $T$  será sobrejetora se, e somente se,  $a^2 = b^2$ ;
- (c)  $T$  será injetora se, e somente se,  $a > b$ ;
- (d)  $T$  será injetora se, e somente se,  $a \neq b$ ;
- (e)  $T$  será bijetora se, e somente se,  $a = b$ .

**Q12.** Considere a base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (0, 1)\}$$

e seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Se

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então  $a + d$  e  $b + c$  serão iguais respectivamente a:

- (a)  $-2$  e  $8$ ;
- (b)  $-2$  e  $4$ ;
- (c)  $2$  e  $-8$ ;
- (d)  $2$  e  $-2$ ;
- (e)  $2$  e  $-4$ .

**Q13.** Seja  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o espaço vetorial de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e sejam  $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  definidas por

$$f_1(t) = \sin(2t), \quad f_2(t) = \cos(2t) \quad \text{e} \quad f_3(t) = e^{-t},$$

para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ . Temos que

$$\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

é uma base do subespaço vetorial  $V$  de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  gerado por  $\mathcal{B}$ . Se  $T : V \rightarrow V$  for a transformação linear definida por

$$T(f) = f',$$

para qualquer  $f \in V$ , então  $[T]_{\mathcal{B}}$  será igual a:

(a)  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

(b)  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$

(c)  $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

(d)  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

(e)  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

**Q14.** Seja  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d,$$

para quaisquer  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T$  é injetora;
- (II)  $\text{Ker}(T)$  é gerado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- (III) o subespaço vetorial

$$\left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} A \right\}$$

de  $M_2(\mathbb{R})$  está contido em  $\text{Ker}(T)$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

**Q15.** Considere a base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}$$

e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  forem tais que

$$[T + S^{-1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então  $a + b + c + d$  será igual a:

- (a) 9;
- (b) 5;
- (c) 8;
- (d) 6;
- (e) 3.

**Q16.** Seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear tal que:

$$T(1 - 2t) = (1, 1, 0), \quad T(2 + t^2) = (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad T(3t - t^2) = (0, 1, 1).$$

Temos que  $T(7 + 7t + 7t^2)$  é igual a:

(a)  $(-1, -6, -5)$ ;

(b)  $(1, -6, 5)$ ;

(c)  $(-1, -6, 5)$ ;

(d)  $(1, 6, -5)$ ;

(e)  $(-1, 6, -5)$ .