PROVA de tipo 00

Q1. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d,$$

para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

(I) T é injetora;

(II) $\mathrm{Ker}(T)$ é gerado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(III) o subespaço vetorial

$$W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} A \right\}$$

de $M_2(\mathbb{R})$ está contido em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(e) todas as afirmações são verdadeiras.

Q2. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c+d & a-b \end{pmatrix},$$

para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) T é injetora;
(b) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$;
(c) T é sobrejetora;
(d) $\dim(\mathrm{Im}(T)) < \dim(\mathrm{Ker}(T))$;
(e) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

① $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \iff d = -a \quad \therefore \quad u \in \mathrm{Ker}(T) \iff (\exists\, a, b, c \in \mathbb{R}) \quad u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} =$

$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Logo (I) é falsa ($\mathrm{Ker}(T) \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$) e (II) é verdadeira.

Além disso, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$ (I comuta com qualquer matriz), mas $I \notin \mathrm{Ker}(T)$. Logo, $W \not\subset \mathrm{Ker}(T)$. Logo, (III) é falsa.

---

② $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$; $\quad T(p) = 0 \iff \begin{cases} a = -d \\ b = c \\ c = -d \\ a = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = -d \end{cases}; \; d \in \mathbb{R}$.

$\therefore \; p \in \mathrm{Ker}(T) \iff (\exists\, d \in \mathbb{R})\, (\forall t \in \mathbb{R}) \quad p(t) = d(-1 - t - t^2 + t^3) = d \cdot u(t)$

Logo, $\mathrm{Ker}(T) = [u]$. $\quad \therefore \dim \mathrm{Im}(T) = \dim P_3(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Ker}(T) = 4 - 1 = \boxed{3}$

Q3. Considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}$$

e denote por $\mathcal{C}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ forem tais que

$$[T + S^{-1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então $a + b + c + d$ será igual a:

(a) 9;
(b) 6;
(c) 5;
(d) 3;
(e) 8.

Q4. Seja $T : P_5(\mathbb{R}) \to P_5(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(p) = p + p',$$

para qualquer $p \in P_5(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$;
(b) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 4$;
(c) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 3$;
(d) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$;
(e) T é bijetora.

③ $T(1,2) = (1,3) = 2(1,2) - (1,1)$
$T(1,1) = (2,1) = -(1,2) + 3(1,1)$

Logo, $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$S(1,2) = (0,1) = 1\cdot(1,2) - (1,1)$
$S(1,1) = (1,1) = 0\cdot(1,2) + 1\cdot(1,1)$

$\therefore [S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \therefore [S^{-1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

De modo que, $[T+S^{-1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $\therefore$ $a+b+c+d = 3+(-1)+0+4 = \boxed{6}$

④ $T(1) = 1+0 = 1$; $T(t^2) = 2t+t^2$; $T(t^4) = t^4+4t^3$
$T(t) = t+1$. $T(t^3) = t^3+3t^2$ $T(t^5) = t^5+5t^4$

Logo, sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3, t^4, t^5\}$, segue pelo método prático que $\mathcal{C} = \{T(1); T(t), T(t^2), \ldots, T(t^5)\}$ é L.I. Como $\mathcal{C}$ gera $Im(T)$, $\mathcal{C}$ é base de $Im(T)$. ($\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ está escalonada com última linha não nula).

Logo, $\dim Im(T) = 6$ $\therefore$ $\dim Ker(T) = 0$ e $\therefore$ T é sobrejetora e T é injetora.

Q5. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(p) = \big(p'(1), p(0) + p(-1), p(0) + p'(0)\big),$$

para qualquer $p \in P_3(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$;

(b) se $b, c, d \in \mathbb{R}$ forem tais que $7t^3 + bt^2 + ct + d$ pertença ao núcleo de T, então $b + c + d$ será igual a -8;

(c) se $b, c, d \in \mathbb{R}$ forem tais que $7t^3 + bt^2 + ct + d$ pertença ao núcleo de T, então $b + c + d$ será igual a 0;

(d) T é bijetora;

(e) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$.

Q6. Sejam n um inteiro positivo, V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ uma transformação linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) T será injetora se, e somente se, T for sobrejetora;

(II) T será injetora se, e somente se, $T \circ T$ for injetora;

(III) se $\mathcal{B}$ for uma base do espaço vetorial V, então a dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$ coincidirá com a dimensão do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

---

5. $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$; $p'(t) = b + 2ct + 3dt^2$.

∴ $p(0) + p(-1) = a + a - b + c - d = 2a - b + c - d$; $p(0) + p'(0) = a + b$.

$p'(1) = b + 2c + 3d$.

∴ $T(p) = (b + 2c + 3d,\ 2a - b + c - d,\ a + b)$.

∴ $T(p) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{37}{7}d \\ b = \frac{-37}{7}d \\ c = \frac{-8}{7}d \end{cases}$; $d \in \mathbb{R}$.

Logo, $p \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow (\exists d \in \mathbb{R})(\forall t \in \mathbb{R})\ p(t) = \frac{d}{7}(37 - 37t - 8t^2 + 7t^3)$.

∴ $\mathrm{Ker}(T) = [37 - 37t - 8t^2 + 7t^3]$. ∴ $\boxed{b + c + d = -8}$

---

6. (I) T é injetora $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{0\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(T) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = n \Leftrightarrow T$ é sobrejetora. ∴ (I) é V.

(II) T é injet. $\Rightarrow T \circ T$ é injet (pois composta de injetoras é injetora).

Reciprocamente, se $u \in \mathrm{Ker}(T)$, então $T(u) = 0$.

Logo, $T \circ T(u) = T(T(u)) = T(0) = 0$ ∴ $u = 0$ (já que $T \circ T$ é, por hip, injetora). ∴ $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ e

∴ T é injetora ∴ (II) é V.

(III) Seja $T = 1_{\mathbb{R}^2}$ (i.e. $T(u) = u$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$). ($\forall$ B base do $\mathbb{R}^2$)

$[T]_B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ∴ As linhas de $[T]_B$ gera $\mathbb{R}^2$.

Logo, a dim. do subesp. do $\mathbb{R}^2$ gerado pelas linhas de $[T]_B$ é 2.

Mas $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Logo $\dim \mathrm{Ker}(T) = 0 \neq 2$.

∴ (III) é F.

Q7. Considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathcal{B} = \{(1,2),(0,1)\}$$

e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denote por $\mathcal{C}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então $a+d$ e $b+c$ serão iguais respectivamente a:

(a) -2 e 4;
(b) 2 e -2;
(c) -2 e 8;
(d) 2 e -8;
(e) 2 e -4.

Q8. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear $T : P_6(\mathbb{R}) \to P_6(\mathbb{R})$ tal que:

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T);$$

(II) se V for um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$, então:

$$V = \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T);$$

(III) existe uma transformação linear bijctora $T : P_8(\mathbb{R}) \to M_{4\times 2}(\mathbb{R})$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) todas as afirmações são falsas;
(c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

7

$T(1,2) = 1(1,2) - 2(0,1) = (1,0)$

$T(0,1) = 2(1,2) + 1(0,1) = (2,5)$

Logo, $T(1,0) = T((1,2) - 2(1,0)) = T(1,2) - 2\,T(1,0) = (1,0) - (4,10) = (-3,-10)$

Daí, $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$ Logo $a+d = -3+5 = 2$ e $b+c = 2-10 = -8$.

8

(I) Se $T : P_6(\mathbb{R}) \to P_6(\mathbb{R})$ é tq. $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$, então $7 = \dim P_6(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = 2 \dim \mathrm{Ker}(T)$.

Logo, $\dim \mathrm{Ker}(T) = 7/2$ $\therefore$ (I) é F.

(II) $\dim(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)) = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) - \dim(\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T)) =$

$= \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim V$.

Como $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T) \subset V$, segue $V = \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)$.

Logo, (II) é V.

(III) Se $T : P_8(\mathbb{R}) \to M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ é linear e bijetora, então

$9 = \dim P_8(\mathbb{R}) = \dim M_{4\times 2}(\mathbb{R}) = 8$!

Logo, (III) é F.

Q9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(\alpha + \beta t + \gamma t^2) = \alpha + \beta - (\alpha + \gamma)t + (\alpha a + \gamma b)t^2,$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) T será injetora se, e somente se, $a \neq b$;
(b) T será injetora se, e somente se, $a > b$;
(c) T será sobrejetora se, e somente se, $a^2 = b^2$;
(d) T será bijetora se, e somente se, $a = b$;
(e) T será sobrejetora se, e somente se, $a < b$.

Q10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$T(1, 0, 0) = 1 + 3t + t^2$, $\quad T(1, 2, 0) = 1 + t + 3t^2$ $\quad$ e $\quad T(1, 2, 3) = 1 + at + bt^2$.

Temos que T será injetora se, e somente se:

(a) $a - b = 2$;
(b) $a - b \neq 2$;
(c) $a + b \neq 4$;
(d) $a + b = 4$;
(e) $a \neq b$.

Q11. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$T(1 - 2t) = (1, 1, 0)$, $\quad T(2 + t^2) = (1, 0, 1)$ $\quad$ e $\quad T(3t - t^2) = (0, 1, 1)$.

Temos que $T(7 + 7t + 7t^2)$ é igual a:

(a) $(-1, 6, -5)$;
(b) $(1, 6, -5)$;
(c) $(-1, -6, -5)$;
(d) $(-1, -6, 5)$;
(e) $(1, -6, 5)$.

---

9) $T(1) = 1 - t + at^2$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$

$T(t) = 1$

$T(t^2) = -t + bt^2$

Logo, $\mathcal{B} = \{T(1), T(t), T(t^2)\}$ é L.I. $\Leftrightarrow b \neq a$

Daí, $b \neq a \Leftrightarrow \mathcal{B}$ é base de $Im(T) \Leftrightarrow \dim Im(T) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T$ é sobrejetora $\Leftrightarrow$ T é injetora (T é operador linear).

---

10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 1 & 3 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & a-3 \\ 0 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & a-3 \\ 0 & 0 & a+b-4 \end{pmatrix}$

Dado que $\{(1,0,0), (1,2,0), (1,2,3)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{T(1,0,0), T(1,2,0), T(1,2,3)\}$ gera $Im(T)$. Logo, $\mathcal{B}$ é L.I. $\Leftrightarrow a + b \neq 4$.

$\therefore \dim Im(T) = 3 \Leftrightarrow \mathcal{B}$ é L.I. $\Leftrightarrow a + b \neq 4$.

$\therefore a + b \neq 4 \Leftrightarrow \dim Im(T) = 3 \Leftrightarrow T$ é sobrejetora $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T$ é injetora (pois $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim P_2(\mathbb{R})$)

---

11) $7 + 7t + 7t^2 = a(1 - 2t) + b(2 + t^2) + c(3t - t^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7 + 7t + 7t^2 = (a + 2b) + (-2a + 3c)t + (b - c)t^2 \Leftrightarrow$

$a = -5$; $b = 6$; $c = -1$.

Logo, $T(7 + 7t + 7t^2) = -5(1,1,0) + 6(1,0,1) + (-1)(0,1,1) = \boxed{(1, -6, 5)}$

Q12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que:

$$\operatorname{Ker}(T) = [(1,2,-1),(-1,1,1)] \quad \text{e} \quad T(2,1,1) = (4,2,2).$$

Sabe-se que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ forem tais que $T(a,b,c) = (x,y,z)$, então $x+y+z$ será igual a:

(a) $\frac{1}{3}(-a+c)$;
(b) $\frac{2}{3}(a+b+c)$;
(c) $\frac{8}{3}(a+c)$;
(d) $\frac{4}{3}(2a+b-c)$;
(e) $3(a-b+c)$.

Q13. Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{C}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(2,-1)$ é igual a:

(a) $(5,-7,-7)$;
(b) $(3,-3,-1)$;
(c) $(-1,-7,-7)$;
(d) $(3,-5,-1)$;
(e) $(5,-1,-7)$.

(12) $(a,b,c) = \alpha(1,2,-1) + \beta(-1,1,1) + \gamma(2,1,1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = a \\ 2\alpha + \beta + \gamma = b \\ -\alpha + \beta + \gamma = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} b-c \\ -a+b+c \\ a+c \end{pmatrix}$$

Logo, $T(a,b,c) = \left(\frac{b-c}{3}\right)T(1,2,-1) + \left(\frac{-a+b+c}{3}\right)T(-1,1,1) + \left(\frac{a+c}{3}\right)T(2,1,1) =$

$= \frac{a+c}{3}(4,2,2)$. Logo, $(x,y,z) = \frac{a+c}{3}(4,2,2)$

$\therefore x+y+z = \boxed{\frac{8}{3}(a+c)}$

(13) $T(1,1) = (1,-2,1)$; $T(0,1) = (-1,1,3)$.

$\therefore T(1,0) = T((1,1)-(0,1)) = T(1,1) - T(0,1) = (2,-3,-2)$

$\therefore T(2,-1) = 2T(1,0) - T(0,1) = (4,-6,-4) - (-1,1,3) = \boxed{(5,-7,-7)}$

Q14. Sejam V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$. Assinale a alternativa correta:

(a) vale necessariamente que $T \circ T = 0$ e $T \neq 0$;
(b) vale necessariamente que $T = 0$;
(c) vale necessariamente que $T \circ T = T$;
(d) é possível que $\dim(V) = 5$;
(e) vale necessariamente que $V = \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)$.

(14) $2 \dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim V > 0$ (pois $V \neq \{0\}$).

$\therefore \dim \mathrm{Im}(T) > 0$. Logo, $T \neq 0$.

Ademais $(\forall u \in V)\ (T \circ T)(u) = T(T(u)) = 0$, pois $T(u) \in \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T)$;

Logo, $T \circ T = 0$

(Obs. Obviamente, (b), (c), (d) são falsas.
Também, se $V = \mathbb{R}^2$; $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T(1,0) = (0,0)$ e $T(0,1) = (1,0)$,
$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$. Logo, $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T) = [(1,0)] \neq \mathbb{R}^2$.
Logo, (e) também é falsa.)

Q15. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e sejam $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ definidas por

$$f_1(t) = \operatorname{sen}(2t), \quad f_2(t) = \cos(2t) \quad \text{e} \quad f_3(t) = e^{-t},$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

é uma base do subespaço vetorial V de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gerado por $\mathcal{B}$. Se $T: V \to V$ for a transformação linear definida por

$$T(f) = f',$$

para qualquer $f \in V$, então $[T]_{\mathcal{B}}$ será igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

15 $f_1'(t) = 2\cos(2t)$; $f_2'(t) = -2\,\operatorname{sen}(2t)$; $f_3'(t) = -e^{-t}$

$\therefore\ T(f_1) = f_1' = 2f_2$; $T(f_2) = -2f_1$; $T(f_3) = -f_3$.

$\therefore\ [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Q16. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C}$ denota a base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\mathcal{C} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}.$$

Temos que $T(-1,2)$ é igual a:

(a) $(1, 4, -7)$;
(b) $(-1, 3, 7)$;
(c) $(-1, 0, 7)$;
(d) $(1, 5, -2)$;
(e) $(-1, -3, 11)$.

16 $T(1,0) = (1,1,1) - 2(0,1,1) + (0,0,1) = (1,-1,0)$.
$T(0,1) = (1,1,1) + (0,1,1) - 3(0,0,1) = (1,2,-1)$.
$\therefore T(-1,2) = (-1)T(1,0) + 2\,T(0,1) = (-1,1,0) + (2,4,-2) = \boxed{(1,5,-2)}$