

Q1. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com \mathcal{B} uma base ortonormal. Denote por A o conjunto formado pelos números reais a para os quais a equação

$$x^2 - 2axy + 5y^2 = 10$$

representa uma elipse. Assinale a alternativa correta:

- (a) $A = \{a \in \mathbb{R} : |a| < \sqrt{5}\}$;
- (b) $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 20\}$;
- (c) $A = \mathbb{R}$;
- (d) A é o conjunto vazio;
- (e) $A = \{a \in \mathbb{R} : a = 0 \text{ ou } |a| > \sqrt{5}\}$.

Q2. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 3 munido de um produto interno e seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de V . Considere o subespaço vetorial W de V dado por

$$W = [2e_1 + e_2, -5e_2 + 2e_3]$$

e seja $v = e_1 - e_2$. Temos que a projeção ortogonal de v em W é igual a:

- (a) $9e_1 - 8e_2 + 5e_3$;
- (b) $\frac{2}{5}e_1 - \frac{96}{145}e_2 + \frac{10}{29}e_3$;
- (c) $\frac{9}{10}e_1 - \frac{4}{5}e_2 + \frac{1}{2}e_3$;
- (d) $e_1 - 2e_2 + e_3$;
- (e) $2e_1 + 6e_2 - 2e_3$.

Q3. Assinale a alternativa correspondente à solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = 9x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo a condição $x(0) = 0, y(0) = 6$:

- (a) $x(t) = -e^{-t} + e^{5t}, y(t) = 3e^{-t} + 3e^{5t}$;
- (b) $x(t) = 0, y(t) = 6e^{5t}$;
- (c) $x(t) = 0, y(t) = 6$;
- (d) $x(t) = e^t - e^{-t}, y(t) = 2e^t + 4e^{-t}$;
- (e) $x(t) = 2e^{-t} - 2e^{5t}, y(t) = 6e^{-t}$.

Q4. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4i & -3i \\ 6i & -5i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

e considere as seguintes afirmações:

- (I) A possui dois autovalores reais distintos;
- (II) A é diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (III) A^{90} possui dois autovalores reais distintos.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são falsas;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q5. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e W_1 e W_2 forem subespaços vetoriais de V tais que $W_1 \subset W_2$, então a desigualdade

$$\|v - \text{proj}_{W_2} v\| \leq \|v - \text{proj}_{W_1} v\|$$

será válida para qualquer $v \in V$, em que $\|\cdot\|$ denota a norma correspondente ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

- (II) se n for um inteiro positivo e $A \in M_n(\mathbb{R})$ for uma matriz diagonalizável, então o conjunto das soluções reais do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ será um subespaço vetorial de dimensão n do espaço vetorial de todas as funções $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- (III) se $\{e_1, e_2, e_3\}$ denotar a base canônica de \mathbb{R}^3 e se (r, s, t) forem as coordenadas na base $\{e_3, e_1, e_2\}$ de um elemento do conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x^2 + 7y^2 - 2z^2 = 10\},$$

então valerá que $-2r^2 + 5s^2 + 7t^2 = 10$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são falsas.

Q6. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real simétrica cujo polinômio característico seja dado por:

$$p_A(t) = -(t - 55)(t - 66)(t - 77).$$

Suponha que

$$\text{Ker}(T - 55I) = [(1, 1, 1)] \quad \text{e} \quad \text{Ker}(T - 66I) = [(-2, 1, 1)],$$

em que $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denota o operador linear que é representado por A na base canônica de \mathbb{R}^3 e I denota o operador identidade de \mathbb{R}^3 . Assinale a alternativa correspondente a uma solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$:

- (a) $X(t) = (e^{77t}, -e^{77t}, 0)$;
- (b) $X(t) = (0, e^{77t}, -e^{77t})$;
- (c) $X(t) = (e^{77t}, 0, -e^{77t})$;
- (d) $X(t) = (0, e^{77t}, e^{77t})$;
- (e) $X(t) = (e^{77t}, e^{77t}, e^{77t})$.

Q7. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e sejam \mathcal{B} e \mathcal{C} bases ortonormais de V . Denote por I o operador identidade de V . Considere as seguintes afirmações:

- (I) $(2, 3, 4, 5)$ **não** é uma linha da matriz $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$;
- (II) as matrizes $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ e $[I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ possuem o mesmo determinante;
- (III) se $T : V \rightarrow V$ for um operador linear tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja simétrica, então a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ também será simétrica.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q8. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^2 munido do seu produto interno usual. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

em que \mathcal{B} é a base de \mathbb{R}^2 dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) T é simétrico;
- (II) T possui dois autovalores distintos;
- (III) T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são falsas.

Q9. Sejam n um inteiro positivo, V um espaço vetorial complexo de dimensão n , $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $S : V \rightarrow V$ o operador linear definido por

$$S = T \circ T + I,$$

em que I denota o operador identidade de V . Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **NÃO** é necessariamente verdadeira:

- (a) $T \circ S = S \circ T$;
- (b) se S for o operador nulo, então T será bijetor;
- (c) se $\lambda \in \mathbb{C}$ for um autovalor de T , então $\lambda^2 + 1$ será um autovalor de S ;
- (d) se T for diagonalizável, então S será bijetor;
- (e) se o polinômio característico de T tiver n raízes reais distintas, então S será bijetor.

Q10. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com \mathcal{B} uma base ortonormal. Considere a cônica representada pela equação:

$$3x^2 + 4xy + 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y = \frac{11}{4}.$$

Sabe-se que $(2, 1)$ e $(1, -2)$ são autovetores da matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

associados, respectivamente, aos autovalores 4 e -1 . Assinale a alternativa correta:

- (a) a equação dada representa um par de retas concorrentes;
- (b) a equação dada representa um par de retas paralelas;
- (c) a equação dada representa uma hipérbole;
- (d) a equação dada representa uma elipse;
- (e) a equação dada representa uma parábola.

Q11. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz real e suponha que i e $1 - 2i$ sejam raízes do polinômio característico de A . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) $-i$ é um autovalor de A ;
- (b) A possui um autovalor complexo com multiplicidade geométrica igual a 2 ;
- (c) A não possui autovalores reais;
- (d) A é diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (e) A não é diagonalizável sobre \mathbb{R} .

Q12. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno usual. Seja $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear e sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1, 1, 1), \quad (1, -1, 0) \quad \text{e} \quad (0, 1, -1)$$

sejam autovetores de S associados, respectivamente, aos autovalores a, b e c . Temos que o operador S será simétrico se, e somente se:

- (a) $a \neq b, a \neq c$ e $b \neq c$;
- (b) $a = b$;
- (c) $b = c$;
- (d) $b \neq c$;
- (e) $a = c$.

Q13. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 dado por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 2z = 0\}.$$

Se $v \in S$ e $w \in S^\perp$ forem tais que $v + w = (1, 1, 1)$, então:

- (a) $w = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9})$;
- (b) $w = (-1, 1, 3)$;
- (c) $w = (1, 0, 1)$;
- (d) $w = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$;
- (e) $w = (\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9})$.

Q14. Seja V o espaço vetorial de todas as funções deriváveis $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que a derivada f' seja contínua e $f(0) = 0$. Considere V munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g'(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in V$. Seja W o subespaço vetorial de V gerado por:

$$\{x, \text{sen } x, \text{sen}(2x)\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a uma base ortonormal de W :

- (a) $\{\frac{1}{2\pi}(x + x^2), \frac{1}{2\pi}(x - x^2), \frac{1}{2\pi} \text{sen}(2x)\}$;
- (b) $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen } x, \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{sen}(2x)\}$;
- (c) $\{x, x + \text{sen } x, x + \text{sen}(2x)\}$;
- (d) $\{\frac{1}{2\pi}(1 - \cos x), \frac{1}{2\pi}x \text{sen } x, \frac{1}{2\pi}x \text{sen}(2x)\}$;
- (e) $\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(x + \text{sen } x), \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(x - \text{sen } x), \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{sen}(2x)\}$.

Q15. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real. Suponha que 1 e i sejam raízes do polinômio característico de A e que

$$\text{Ker}(T - \text{I}) = [(0, 1, 1)] \quad \text{e} \quad \text{Ker}(T - i\text{I}) = [(2 + i, 1, 2)],$$

em que $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ denota o operador linear que é representado por A na base canônica de \mathbb{C}^3 e I denota o operador identidade de \mathbb{C}^3 . Assinale a alternativa correspondente a uma base do espaço das soluções reais do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$:

- (a) $\{(2e^t, e^t, 2e^t), (2e^{-t}, e^{-t}, 2e^{-t}), (0, e^t, e^t)\}$;
- (b) $\{(2 \cos t - \text{sen } t, \text{sen } t, 2 \text{sen } t), (\cos t + 2 \text{sen } t, \cos t, 2 \cos t), (0, e^t, e^t)\}$;
- (c) $\{(2 \cos t + \text{sen } t, \text{sen } t, 2 \text{sen } t), (\cos t + \text{sen } t, \text{sen } t, 2 \text{sen } t), (0, e^t, e^t)\}$;
- (d) $\{(2 \cos t - \text{sen } t, \cos t, 2 \cos t), (\cos t + 2 \text{sen } t, \text{sen } t, 2 \text{sen } t), (0, e^t, e^t)\}$;
- (e) $\{(e^{2t}, e^{2t}, 2e^{2t}), (0, e^t, e^t)\}$.

Q16. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 555 & 666 & 777 \\ 666 & 888 & 999 \\ 777 & 999 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) nem A e nem C são diagonalizáveis sobre \mathbb{C} e B é diagonalizável sobre \mathbb{C} , mas não sobre \mathbb{R} ;
- (b) A é diagonalizável sobre \mathbb{R} e B e C são diagonalizáveis sobre \mathbb{C} , mas nem B e nem C são diagonalizáveis sobre \mathbb{R} ;
- (c) A , B e C são diagonalizáveis sobre \mathbb{R} ;
- (d) A e B são diagonalizáveis sobre \mathbb{R} e C é diagonalizável sobre \mathbb{C} , mas não sobre \mathbb{R} ;
- (e) A , B e C são diagonalizáveis sobre \mathbb{C} , mas nenhuma delas é diagonalizável sobre \mathbb{R} .