

**Q1.** Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$  uma matriz real simétrica cujo polinômio característico seja dado por:

$$p_A(t) = -(t - 55)(t - 66)(t - 77).$$

Suponha que

$$\text{Ker}(T - 55I) = [(1, 1, 1)] \quad \text{e} \quad \text{Ker}(T - 66I) = [(-2, 1, 1)],$$

em que  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  denota o operador linear que é representado por  $A$  na base canônica de  $\mathbb{R}^3$  e  $I$  denota o operador identidade de  $\mathbb{R}^3$ . Assinale a alternativa correspondente a uma solução do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$ :

- (a)  $X(t) = (0, e^{77t}, -e^{77t})$ ;
- (b)  $X(t) = (e^{77t}, -e^{77t}, 0)$ ;
- (c)  $X(t) = (0, e^{77t}, e^{77t})$ ;
- (d)  $X(t) = (e^{77t}, e^{77t}, e^{77t})$ ;
- (e)  $X(t) = (e^{77t}, 0, -e^{77t})$ .

**Q2.** Seja  $A \in M_4(\mathbb{R})$  uma matriz real e suponha que  $i$  e  $1 - 2i$  sejam raízes do polinômio característico de  $A$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a)  $-i$  é um autovalor de  $A$ ;
- (b)  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (c)  $A$  possui um autovalor complexo com multiplicidade geométrica igual a 2;
- (d)  $A$  não possui autovalores reais;
- (e)  $A$  não é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Q3.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual. Seja  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear e sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tais que

$$(1, 1, 1), \quad (1, -1, 0) \quad \text{e} \quad (0, 1, -1)$$

sejam autovetores de  $S$  associados, respectivamente, aos autovalores  $a, b$  e  $c$ . Temos que o operador  $S$  será simétrico se, e somente se:

- (a)  $b \neq c$ ;
- (b)  $a \neq b, a \neq c$  e  $b \neq c$ ;
- (c)  $b = c$ ;
- (d)  $a = c$ ;
- (e)  $a = b$ .

**Q4.** Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e sejam  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  bases ortonormais de  $V$ . Denote por  $I$  o operador identidade de  $V$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $(2, 3, 4, 5)$  **não** é uma linha da matriz  $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ ;
- (II) as matrizes  $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  e  $[I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$  possuem o mesmo determinante;
- (III) se  $T : V \rightarrow V$  for um operador linear tal que a matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  seja simétrica, então a matriz  $[T]_{\mathcal{C}}$  também será simétrica.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

**Q5.** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a cônica representada pela equação:

$$3x^2 + 4xy + 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y = \frac{11}{4}.$$

Sabe-se que  $(2, 1)$  e  $(1, -2)$  são autovetores da matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

associados, respectivamente, aos autovalores 4 e  $-1$ . Assinale a alternativa correta:

- (a) a equação dada representa um par de retas concorrentes;
- (b) a equação dada representa uma elipse;
- (c) a equação dada representa um par de retas paralelas;
- (d) a equação dada representa uma parábola;
- (e) a equação dada representa uma hipérbole.

**Q6.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 555 & 666 & 777 \\ 666 & 888 & 999 \\ 777 & 999 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $A$ ,  $B$  e  $C$  são diagonalizáveis sobre  $\mathbb{C}$ , mas nenhuma delas é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (b)  $A$ ,  $B$  e  $C$  são diagonalizáveis sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (c)  $A$  e  $B$  são diagonalizáveis sobre  $\mathbb{R}$  e  $C$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ , mas não sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (d) nem  $A$  e nem  $C$  são diagonalizáveis sobre  $\mathbb{C}$  e  $B$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ , mas não sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (e)  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  e  $B$  e  $C$  são diagonalizáveis sobre  $\mathbb{C}$ , mas nem  $B$  e nem  $C$  são diagonalizáveis sobre  $\mathbb{R}$ .

**Q7.** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções deriváveis  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que a derivada  $f'$  seja contínua e  $f(0) = 0$ . Considere  $V$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g'(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $W$  o subespaço vetorial de  $V$  gerado por:

$$\{x, \text{sen } x, \text{sen}(2x)\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a uma base ortonormal de  $W$ :

- (a)  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen } x, \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{sen}(2x) \right\}$ ;
- (b)  $\{x, x + \text{sen } x, x + \text{sen}(2x)\}$ ;
- (c)  $\left\{ \frac{1}{2\pi}(x + x^2), \frac{1}{2\pi}(x - x^2), \frac{1}{2\pi} \text{sen}(2x) \right\}$ ;
- (d)  $\left\{ \frac{1}{2\pi}(1 - \cos x), \frac{1}{2\pi}x \text{sen } x, \frac{1}{2\pi}x \text{sen}(2x) \right\}$ ;
- (e)  $\left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(x + \text{sen } x), \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(x - \text{sen } x), \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{sen}(2x) \right\}$ .

**Q8.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  munido do seu produto interno usual. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é a base de  $\mathbb{R}^2$  dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T$  é simétrico;
- (II)  $T$  possui dois autovalores distintos;
- (III)  $T$  é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são falsas;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

**Q9.** Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão 3 munido de um produto interno e seja  $\{e_1, e_2, e_3\}$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere o subespaço vetorial  $W$  de  $V$  dado por

$$W = [2e_1 + e_2, -5e_2 + 2e_3]$$

e seja  $v = e_1 - e_2$ . Temos que a projeção ortogonal de  $v$  em  $W$  é igual a:

- (a)  $9e_1 - 8e_2 + 5e_3$ ;
- (b)  $2e_1 + 6e_2 - 2e_3$ ;
- (c)  $\frac{9}{10}e_1 - \frac{4}{5}e_2 + \frac{1}{2}e_3$ ;
- (d)  $\frac{2}{5}e_1 - \frac{96}{145}e_2 + \frac{10}{29}e_3$ ;
- (e)  $e_1 - 2e_2 + e_3$ .

**Q10.** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Denote por  $A$  o conjunto formado pelos números reais  $a$  para os quais a equação

$$x^2 - 2axy + 5y^2 = 10$$

representa uma elipse. Assinale a alternativa correta:

- (a)  $A = \{a \in \mathbb{R} : a = 0 \text{ ou } |a| > \sqrt{5}\}$ ;
- (b)  $A = \mathbb{R}$ ;
- (c)  $A$  é o conjunto vazio;
- (d)  $A = \{a \in \mathbb{R} : |a| < \sqrt{5}\}$ ;
- (e)  $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 20\}$ .

**Q11.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $W_1$  e  $W_2$  forem subespaços vetoriais de  $V$  tais que  $W_1 \subset W_2$ , então a desigualdade

$$\|v - \text{proj}_{W_2} v\| \leq \|v - \text{proj}_{W_1} v\|$$

será válida para qualquer  $v \in V$ , em que  $\|\cdot\|$  denota a norma correspondente ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ;

- (II) se  $n$  for um inteiro positivo e  $A \in M_n(\mathbb{R})$  for uma matriz diagonalizável, então o conjunto das soluções reais do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  será um subespaço vetorial de dimensão  $n$  do espaço vetorial de todas as funções  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;
- (III) se  $\{e_1, e_2, e_3\}$  denotar a base canônica de  $\mathbb{R}^3$  e se  $(r, s, t)$  forem as coordenadas na base  $\{e_3, e_1, e_2\}$  de um elemento do conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x^2 + 7y^2 - 2z^2 = 10\},$$

então valerá que  $-2r^2 + 5s^2 + 7t^2 = 10$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são falsas;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

**Q12.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$  dado por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 2z = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $v + w = (1, 1, 1)$ , então:

- (a)  $w = (1, 0, 1)$ ;
- (b)  $w = (\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9})$ ;
- (c)  $w = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ;
- (d)  $w = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9})$ ;
- (e)  $w = (-1, 1, 3)$ .

**Q13.** Assinale a alternativa correspondente à solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = 9x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo a condição  $x(0) = 0, y(0) = 6$ :

- (a)  $x(t) = -e^{-t} + e^{5t}, y(t) = 3e^{-t} + 3e^{5t}$ ;
- (b)  $x(t) = 0, y(t) = 6e^{5t}$ ;
- (c)  $x(t) = e^t - e^{-t}, y(t) = 2e^t + 4e^{-t}$ ;
- (d)  $x(t) = 2e^{-t} - 2e^{5t}, y(t) = 6e^{-t}$ ;
- (e)  $x(t) = 0, y(t) = 6$ .

**Q14.** Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$  uma matriz real. Suponha que 1 e  $i$  sejam raízes do polinômio característico de  $A$  e que

$$\text{Ker}(T - I) = [(0, 1, 1)] \quad \text{e} \quad \text{Ker}(T - iI) = [(2 + i, 1, 2)],$$

em que  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  denota o operador linear que é representado por  $A$  na base canônica de  $\mathbb{C}^3$  e  $I$  denota o operador identidade de  $\mathbb{C}^3$ . Assinale a alternativa correspondente a uma base do espaço das soluções reais do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$ :

- (a)  $\{(2 \cos t - \sin t, \cos t, 2 \cos t), (\cos t + 2 \sin t, \sin t, 2 \sin t), (0, e^t, e^t)\}$ ;
- (b)  $\{(2e^t, e^t, 2e^t), (2e^{-t}, e^{-t}, 2e^{-t}), (0, e^t, e^t)\}$ ;
- (c)  $\{(2 \cos t + \sin t, \sin t, 2 \sin t), (\cos t + \sin t, \sin t, 2 \sin t), (0, e^t, e^t)\}$ ;
- (d)  $\{(2 \cos t - \sin t, \sin t, 2 \sin t), (\cos t + 2 \sin t, \cos t, 2 \cos t), (0, e^t, e^t)\}$ ;
- (e)  $\{(e^{2t}, e^{2t}, 2e^{2t}), (0, e^t, e^t)\}$ .

**Q15.** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4i & -3i \\ 6i & -5i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $A$  possui dois autovalores reais distintos;
- (II)  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (III)  $A^{90}$  possui dois autovalores reais distintos.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são falsas;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Q16.** Sejam  $n$  um inteiro positivo,  $V$  um espaço vetorial complexo de dimensão  $n$ ,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $S : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$S = T \circ T + I,$$

em que  $I$  denota o operador identidade de  $V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **NÃO** é necessariamente verdadeira:

- (a)  $T \circ S = S \circ T$ ;
- (b) se o polinômio característico de  $T$  tiver  $n$  raízes reais distintas, então  $S$  será bijetor;
- (c) se  $T$  for diagonalizável, então  $S$  será bijetor;
- (d) se  $\lambda \in \mathbb{C}$  for um autovalor de  $T$ , então  $\lambda^2 + 1$  será um autovalor de  $S$ ;
- (e) se  $S$  for o operador nulo, então  $T$  será bijetor.