Q1. Seja V o espaço vetorial de todas as funções deriváveis $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ tais que a derivada f' seja contínua e $f(0) = 0$. Considere V munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in V$. Seja W o subespaço vetorial de V gerado por:

$$\{x, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(2x)\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a uma base ortonormal de W:

(a) $\left\{\frac{1}{2\pi}(1 - \cos x), \frac{1}{2\pi} x \operatorname{sen} x, \frac{1}{2\pi} x \operatorname{sen}(2x)\right\}$;
(b) $\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(x + \operatorname{sen} x), \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(x - \operatorname{sen} x), \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(2x)\right\}$;
(c) $\{x, x + \operatorname{sen} x, x + \operatorname{sen}(2x)\}$;
(d) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(2x)\right\}$;
(e) $\left\{\frac{1}{2\pi}(x + x^2), \frac{1}{2\pi}(x - x^2), \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(2x)\right\}$.

Q2. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 3 munido de um produto interno e seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de V. Considere o subespaço vetorial W de V dado por

$$W = [2e_1 + e_2, -5e_2 + 2e_3]$$

e seja $v = e_1 - e_2$. Temos que a projeção ortogonal de v em W é igual a:

(a) $\frac{9}{10}e_1 - \frac{4}{5}e_2 + \frac{1}{2}e_3$;
(b) $e_1 - 2e_2 + e_3$;
(c) $\frac{2}{5}e_1 - \frac{96}{145}e_2 + \frac{10}{29}e_3$;
(d) $2e_1 + 6e_2 - 2e_3$;
(e) $9e_1 - 8e_2 + 5e_3$.

Q3. Sejam n um inteiro positivo, V um espaço vetorial complexo de dimensão n, $T : V \to V$ um operador linear e $S : V \to V$ o operador linear definido por

$$S = T \circ T + \mathrm{I},$$

em que I denota o operador identidade de V. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **NÃO** é necessariamente verdadeira:

(a) se $\lambda \in \mathbb{C}$ for um autovalor de T, então $\lambda^2 + 1$ será um autovalor de S;
(b) se T for diagonalizável, então S será bijetor;
(c) $T \circ S = S \circ T$;
(d) se S for o operador nulo, então T será bijetor;
(e) se o polinômio característico de T tiver n raízes reais distintas, então S será bijetor.

Q4. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 2z = 0\}.$$

Se $v \in S$ e $w \in S^\perp$ forem tais que $v + w = (1, 1, 1)$, então:

(a) $w = (1, 0, 1)$;
(b) $w = (-1, 1, 3)$;
(c) $w = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$;
(d) $w = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$;
(e) $w = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Q5. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4i & -3i \\ 6i & -5i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

e considere as seguintes afirmações:

(I) A possui dois autovalores reais distintos;
(II) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$;
(III) A^{90} possui dois autovalores reais distintos.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) todas as afirmações são falsas;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q6. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Seja $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear e sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1, 1, 1), \quad (1, -1, 0) \quad \text{e} \quad (0, 1, -1)$$

sejam autovetores de S associados, respectivamente, aos autovalores a, b e c. Temos que o operador S será simétrico se, e somente se:

(a) $a = b$;
(b) $b \neq c$;
(c) $a = c$;
(d) $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$;
(e) $b = c$.

Q7. Assinale a alternativa correspondente à solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = 9x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo a condição $x(0) = 0$, $y(0) = 6$:

(a) $x(t) = e^t - e^{-t}$, $y(t) = 2e^t + 4e^{-t}$;
(b) $x(t) = 2e^{-t} - 2e^{5t}$, $y(t) = 6e^{-t}$;
(c) $x(t) = -e^{-t} + e^{5t}$, $y(t) = 3e^{-t} + 3e^{5t}$;
(d) $x(t) = 0$, $y(t) = 6e^{5t}$;
(e) $x(t) = 0$, $y(t) = 6$.

Q8. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 555 & 666 & 777 \\ 666 & 888 & 999 \\ 777 & 999 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) nem A e nem C são diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$ e B é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$;
(b) A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ e B e C são diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$, mas nem B e nem C são diagonalizáveis sobre $\mathbb{R}$;
(c) A, B e C são diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$, mas nenhuma delas é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;
(d) A e B são diagonalizáveis sobre $\mathbb{R}$ e C é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$;
(e) A, B e C são diagonalizáveis sobre $\mathbb{R}$.

Q9. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica representada pela equação:

$$3x^2 + 4xy + 2\sqrt{5}\,x + 2\sqrt{5}\,y = \frac{11}{4}\,.$$

Sabe-se que $(2,1)$ e $(1,-2)$ são autovetores da matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

associados, respectivamente, aos autovalores 4 e -1. Assinale a alternativa correta:

(a) a equação dada representa um par de retas paralelas;
(b) a equação dada representa uma elipse;
(c) a equação dada representa uma parábola;
(d) a equação dada representa uma hipérbole;
(e) a equação dada representa um par de retas concorrentes.

Q10. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real. Suponha que 1 e i sejam raízes do polinômio característico de A e que

$$\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [(0,1,1)] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - i\mathrm{I}) = [(2+i, 1, 2)],$$

em que $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ denota o operador linear que é representado por A na base canônica de $\mathbb{C}^3$ e I denota o operador identidade de $\mathbb{C}^3$. Assinale a alternativa correspondente a uma base do espaço das soluções reais do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$:

(a) $\{(e^{2t}, e^{2t}, 2e^{2t}), (0, e^t, e^t)\}$;
(b) $\{(2\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t), (\cos t + 2\operatorname{sen} t, \cos t, 2\cos t), (0, e^t, e^t)\}$;
(c) $\{(2\cos t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t), (\cos t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t), (0, e^t, e^t)\}$;
(d) $\{(2\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t, 2\cos t), (\cos t + 2\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t), (0, e^t, e^t)\}$;
(e) $\{(2e^t, e^t, 2e^t), (2e^{-t}, e^{-t}, 2e^{-t}), (0, e^t, e^t)\}$.

Q11. Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e W_1 e W_2 forem subespaços vetoriais de V tais que $W_1 \subset W_2$, então a desigualdade

$$\|v - \mathrm{proj}_{W_2} v\| \leq \|v - \mathrm{proj}_{W_1} v\|$$

será válida para qualquer $v \in V$, em que $\| \cdot \|$ denota a norma correspondente ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

(II) se n for um inteiro positivo e $A \in M_n(\mathbb{R})$ for uma matriz diagonalizável, então o conjunto das soluções reais do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ será um subespaço vetorial de dimensão n do espaço vetorial de todas as funções $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$;

(III) se $\{e_1, e_2, e_3\}$ denotar a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e se (r, s, t) forem as coordenadas na base $\{e_3, e_1, e_2\}$ de um elemento do conjunto

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x^2 + 7y^2 - 2z^2 = 10\big\},$$

então valerá que $-2r^2 + 5s^2 + 7t^2 = 10$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q12. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ortonormais de V. Denote por I o operador identidade de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) $(2, 3, 4, 5)$ **não** é uma linha da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$;

(II) as matrizes $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ e $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ possuem o mesmo determinante;

(III) se $T : V \to V$ for um operador linear tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja simétrica, então a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ também será simétrica.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q13. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real simétrica cujo polinômio característico seja dado por:

$$p_A(t) = -(t-55)(t-66)(t-77).$$

Suponha que

$$\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I}) = [(1,1,1)] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - 66\mathrm{I}) = [(-2,1,1)],$$

em que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denota o operador linear que é representado por A na base canônica de $\mathbb{R}^3$ e I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa correspondente a uma solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$:

(a) $X(t) = (0, e^{77t}, -e^{77t})$;
(b) $X(t) = (e^{77t}, e^{77t}, e^{77t})$;
(c) $X(t) = (0, e^{77t}, e^{77t})$;
(d) $X(t) = (e^{77t}, -e^{77t}, 0)$;
(e) $X(t) = (e^{77t}, 0, -e^{77t})$.

Q14. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Denote por A o conjunto formado pelos números reais a para os quais a equação

$$x^2 - 2axy + 5y^2 = 10$$

representa uma elipse. Assinale a alternativa correta:

(a) $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 20\}$;
(b) A é o conjunto vazio;
(c) $A = \{a \in \mathbb{R} : |a| < \sqrt{5}\}$;
(d) $A = \mathbb{R}$;
(e) $A = \{a \in \mathbb{R} : a = 0 \text{ ou } |a| > \sqrt{5}\}$.

Q15. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) T é simétrico;

(II) T possui dois autovalores distintos;

(III) T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(e) todas as afirmações são falsas.

Q16. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz real e suponha que i e $1 - 2i$ sejam raízes do polinômio característico de A. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) $-i$ é um autovalor de A;

(b) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$;

(c) A não possui autovalores reais;

(d) A possui um autovalor complexo com multiplicidade geométrica igual a 2;

(e) A não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.