Q1. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 3 munido de um produto interno e seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de V. Considere o subespaço vetorial W de V dado por

$$W = [2e_1 + e_2, -5e_2 + 2e_3]$$

e seja $v = e_1 - e_2$. Temos que a projeção ortogonal de v em W é igual a:

(a) $\frac{9}{10}e_1 - \frac{4}{5}e_2 + \frac{1}{2}e_3$;
(b) $9e_1 - 8e_2 + 5e_3$;
(c) $e_1 - 2e_2 + e_3$;
(d) $\frac{2}{5}e_1 - \frac{96}{145}e_2 + \frac{10}{29}e_3$;
(e) $2e_1 + 6e_2 - 2e_3$.

Resposta: Usaremos o tempo todo que $\langle \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{3} \beta_i e_i \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$.

Usando Gram-Schmidt obtemos uma base ortogonal (u_1, u_2) de W:

$u_1 = 2e_2 + e2$, $\|u_1\|^2 = 5$.

$u_2 = -5e_2 + 2e_3 - \frac{\langle u_1, -5e_2+2e_3 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = 2e_1 - 4e_2 + 2e_3$, $\|u_2\|^2 = 24$.

Com isso, $\text{proj}_W\, v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{9}{10}e_1 - \frac{4}{5}e_2 + \frac{1}{2}e_3$.

Q2. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ortonormais de V. Denote por I o operador identidade de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) $(2, 3, 4, 5)$ **não** é uma linha da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$;
(II) as matrizes $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ e $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ possuem o mesmo determinante;
(III) se $T : V \to V$ for um operador linear tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja simétrica, então a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ também será simétrica.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Resposta: (I) Verdadeira, pois as linhas matriz de mudança de base $[I]_{\mathcal{BC}}$, entre bases ortonormais $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ de V, formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno canônico.

(II) Verdadeira pois como $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ são bases ortonormais temos que $[I]_{\mathcal{BC}}^t = [I]_{\mathcal{BC}}^{-1} = [I]_{\mathcal{CB}}$.

(III) Verdadeira, pois que $[T]_{\mathcal{B}}$ seja simétrica ($\mathcal{B}$ base ortonormal de V) quer dizer que T é um operador simétrico. Portanto para toda base ortonormal $\mathcal{C}$ de V temos que $[T]_{\mathcal{C}}$ é simétrica.

Q3. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real simétrica cujo polinômio característico seja dado por:

$$p_A(t) = -(t-55)(t-66)(t-77).$$

Suponha que

$$\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I}) = [(1,1,1)] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - 66\mathrm{I}) = [(-2,1,1)],$$

em que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denota o operador linear que é representado por A na base canônica de $\mathbb{R}^3$ e I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa correspondente a uma solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$:

(a) $X(t) = (0, e^{77t}, -e^{77t})$;
(b) $X(t) = (0, e^{77t}, e^{77t})$;
(c) $X(t) = (e^{77t}, -e^{77t}, 0)$;
(d) $X(t) = (e^{77t}, 0, -e^{77t})$;
(e) $X(t) = (e^{77t}, e^{77t}, e^{77t})$.

Resposta: Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ um autovetor associado ao autovalor 77. Por ser a matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ simétrica, (x, y, z) é ortogonal aos autovetores associados a autovalores diferentes de 77. Logo (x, y, z) é ortogonal a $(1, 1, 1)$ e $(-2, 1, 1)$. Portanto

$$x + y + z = 0, \quad -2x + y + z = 0.$$

Logo $(x, y, z) \in [(0, 1, -1)]$. A teoria nos diz como são as soluções do sistema de equações diferenciais sabendo uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A. No nosso caso, a base de autovetores é $(1, 1, 1), (-2, 1, 1), (0, 1, -1)$, e uma base para as soluções é

$$e^{55t}(1,1,1),\ e^{66t}(-2,1,1),\ e^{77t}(0,1,-1).$$

Assim a solução é $X(t) = (0, e^{77t}, -e^{77t})$.

Q4. Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e W_1 e W_2 forem subespaços vetoriais de V tais que $W_1 \subset W_2$, então a desigualdade

$$\|v - \text{proj}_{W_2} v\| \leq \|v - \text{proj}_{W_1} v\|$$

será válida para qualquer $v \in V$, em que $\| \cdot \|$ denota a norma correspondente ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

(II) se n for um inteiro positivo e $A \in M_n(\mathbb{R})$ for uma matriz diagonalizável, então o conjunto das soluções reais do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ será um subespaço vetorial de dimensão n do espaço vetorial de todas as funções $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$;

(III) se $\{e_1, e_2, e_3\}$ denotar a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e se (r, s, t) forem as coordenadas na base $\{e_3, e_1, e_2\}$ de um elemento do conjunto

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x^2 + 7y^2 - 2z^2 = 10\big\},$$

então valerá que $-2r^2 + 5s^2 + 7t^2 = 10$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(e) todas as afirmações são falsas.

Resposta: (I) Verdadeira. $\text{proj}_{W_1}(v) \in W_1 \subseteq W_2$ e $\text{proj}_{W_2}(v)$ é o elemento de W_2 mais próximo de v. Logo

$$\|v - \text{proj}_{W_2}(v)\| \leq \|v - \text{proj}_{W_1}(v)\|.$$

(II) Verdadeira. Resultado de teoria.

(III) Verdadeira. Se $u = (r, s, t)_{\{e_3, e_1, e_2\}}$ temos que $u = (s, t, r)$. Como u está nesse conjunto temos que $-2r^2 + 5s^2 + 7t^2 = 10$.

Q5. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Seja $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear e sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,1,1), \quad (1,-1,0) \quad \text{e} \quad (0,1,-1)$$

sejam autovetores de S associados, respectivamente, aos autovalores a, b e c. Temos que o operador S será simétrico se, e somente se:

(a) $b = c$;

(b) $a = b$;

(c) $b \neq c$;

(d) $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$;

(e) $a = c$.

Resposta: Suponha que T é simétrico. Por ser T simétrico, sabemos que autovetores associados a autovalores diferentes tem que ser ortogonais. Logo os autovetores $(1,-1,0)$ e $(0,1,-1)$ tem que estar associados ao mesmo autovalor. Portanto $b = c$.

Vejamos que $b = c$ é suficiente. T é simétrico se, e somente se, existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Se $b = c$ temos que se u_1, u_2 é uma base ortonormal de $[(1,-1,0),(0,1,-1)]$ e u_3 base ortonormal de $[(1,1,1)]$ temos que (u_1, u_2, u_3) é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

Q6. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica representada pela equação:

$$3x^2 + 4xy + 2\sqrt{5}\,x + 2\sqrt{5}\,y = \frac{11}{4}\,.$$

Sabe-se que $(2, 1)$ e $(1, -2)$ são autovetores da matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

associados, respectivamente, aos autovalores 4 e -1. Assinale a alternativa correta:

(a) a equação dada representa uma hipérbole;
(b) a equação dada representa um par de retas concorrentes;
(c) a equação dada representa uma elipse;
(d) a equação dada representa uma parábola;
(e) a equação dada representa um par de retas paralelas.

Resposta: Com a parte de grau 2 $(3x^2 + 4xy)$ contruímos a matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. O polinômio característico de A é $c_A(t) = t^2 - 3t - 4 = (t+1)(t-4)$.

Como $A + I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, temos que $\ker(A + I) = [(1, -2)]$.

Como $A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, temos que $\ker(A - 4I) = [(2, 1)]$.

Seja $\mathcal{C} = (\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1))$ uma base ortonormal de autovetores de $\mathbb{R}^2$. Sendo (x, y) as coordenadas em relação à base canônica e (p, q) as coordenadas em relação à $\mathcal{C}$ temos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

e que

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4xy + 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y &= -p^2 + 4q^2 + 2\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}p + 2\frac{2}{\sqrt{5}}q) + 2\sqrt{5}(-\frac{2}{\sqrt{5}}p + \frac{1}{\sqrt{5}}q) \\ &= -p^2 - 2p + 4q^2 + 6q. \end{aligned}$$

Completando quadrados: $-p^2 - 2p = -(p+1)^2 + 1$ e $4q^2 + 6q = 4(q + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{4}$.

Assim obtemos que a equação dada, em relação à $\mathcal{C}$ pode ser escrita como:

$$-(p+1)^2 + 4(q + \frac{3}{4})^2 = \frac{11}{4} + \frac{9}{4} - 1 = 4.$$

Logo a equação dada representa uma hipérbole.

Q7. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 555 & 666 & 777 \\ 666 & 888 & 999 \\ 777 & 999 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ e B e C são diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$, mas nem B e nem C são diagonalizáveis sobre $\mathbb{R}$;

(b) A e B são diagonalizáveis sobre $\mathbb{R}$ e C é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$;

(c) A, B e C são diagonalizáveis sobre $\mathbb{R}$;

(d) nem A e nem C são diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$ e B é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$;

(e) A, B e C são diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$, mas nenhuma delas é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Resposta: A é diagonalizável por ser uma matriz real simétrica.

O polinômio característico de B é $c_B(t) = (1-t)(t^2+1) = (1-t)(t-i)(t+i)$ e o polinômio característico de C é $c_C(t) = t^2+1 = (t-i)(t+i)$. Como esses polinômios característicos não tem todas as raizes reais, temos que B e C não são diagonalizáveis nos reais. Como $c_B(t)$ e $c_C(t)$ tem todas suas raizes simples e diferentes nos complexos temos que B e C são diagonlizáveis nos complexos.

Q8. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real. Suponha que 1 e i sejam raízes do polinômio característico de A e que

$$\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [(0,1,1)] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - i\mathrm{I}) = [(2+i,1,2)],$$

em que $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ denota o operador linear que é representado por A na base canônica de $\mathbb{C}^3$ e I denota o operador identidade de $\mathbb{C}^3$. Assinale a alternativa correspondente a uma base do espaço das soluções reais do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$:

(a) $\{(2\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t, 2\cos t), (\cos t + 2\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t), (0, e^t, e^t)\}$;
(b) $\{(e^{2t}, e^{2t}, 2e^{2t}), (0, e^t, e^t)\}$;
(c) $\{(2\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t), (\cos t + 2\operatorname{sen} t, \cos t, 2\cos t), (0, e^t, e^t)\}$;
(d) $\{(2\cos t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t), (\cos t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t), (0, e^t, e^t)\}$;
(e) $\{(2e^t, e^t, 2e^t), (2e^{-t}, e^{-t}, 2e^{-t}), (0, e^t, e^t)\}$.

Resposta: Como $A \in M_n(\mathbb{R})$ temos que os autovalores de A são $1, i, -i$. Pela teoria estudada, sabemos que as soluções reais dos sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ são combinações lineares de $e^t(0,1,1)$, $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$\begin{aligned} f(t) + ig(t) &= e^{it}(2+i,1,2) \\ &= (\cos t + i \operatorname{sen} t)(2+i,1,2) \\ &= (2\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t, 2\cos t) + i(\cos t + 2\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

Q9. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) T é simétrico;

(II) T possui dois autovalores distintos;

(III) T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(d) todas as afirmações são falsas;

(e) todas as afirmações são verdadeiras.

Solução. Sejam $w_1 = (1,2)$ e $w_2 = (1,1)$ os vetores da base $\mathcal{B}$. Podemos ver facilmente a partir da matriz $A = [T]_{\mathcal{B}}$ que

$$Tw_1 = 2w_1 + w_2 \quad , \quad Tw_2 = w_1 + 2w_2 \ . \tag{1}$$

Sabemos que o polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Como A é uma matriz 2×2, temos

$$p_A(\lambda) \ = \ \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) \ = \ \lambda^2 - 4\lambda + 3 \ .$$

As raízes deste polinômio são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Estes são portanto os autovalores de T. Como tais autovalores são (reais e) distintos, vemos que a afirmação (II) é verdadeira. Se v_1 é um autovetor pertencente ao autovalor $\lambda_1 = 1$ e v_2 é um autovetor pertencente ao autovalor $\lambda_2 = 3$, então $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Isto mostra que T é diagonalizável, ou seja, a afirmação (III) também é correta.

Entretanto, T não é um operador simétrico. Para ver isto, observe que os vetores $v_1 = w_1 - w_2 = (0,1)$ e $v_2 = w_1 + w_2 = (2,3)$ são autovetores de T pertencentes aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, respectivamente: isto se segue facilmente das igualdades (1) acima. Se T fosse simétrico, então v_1 e v_2 deveriam ser ortogonais, mas $\langle v_1, v_2 \rangle = 3 \neq 0$. Isto mostra que a afirmação (I) é falsa, e portanto a alternativa correta é (a).

$\square$

Q10. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4i & -3i \\ 6i & -5i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

e considere as seguintes afirmações:

(I) A possui dois autovalores reais distintos;

(II) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$;

(III) A^{90} possui dois autovalores reais distintos.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(d) todas as afirmações são falsas;

(e) todas as afirmações são verdadeiras.

Solução. Calculando o polinômio característico da matriz A, obtemos

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) \;=\; \det(A - \lambda I) \;&=\; \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) \\ &=\; \lambda^2 + i\lambda + 2 \\ &=\; (\lambda - i)(\lambda + 2i)\ . \end{aligned}$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -2i$, que são imaginários puros distintos. Isso mostra a um só tempo que a afirmação (I) é falsa e que a afirmação (II) é verdadeira. Os autovalores de A^{90} são $\lambda_1^{90} = i^{90} = -1$ e $\lambda_2^{90} = (-2i)^{90} = -2^{90}$, que são obviamente reais e distintos. Isso mostra que a afirmação (III) é verdadeira. Portanto, a alternativa correta é (a). $\square$

Q11. Sejam n um inteiro positivo, V um espaço vetorial complexo de dimensão n, $T : V \to V$ um operador linear e $S : V \to V$ o operador linear definido por

$$S = T \circ T + \mathrm{I},$$

em que I denota o operador identidade de V. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **NÃO** é necessariamente verdadeira:

(a) se T for diagonalizável, então S será bijetor;

(b) se o polinômio característico de T tiver n raízes reais distintas, então S será bijetor;

(c) se S for o operador nulo, então T será bijetor;

(d) se $\lambda \in \mathbb{C}$ for um autovalor de T, então $\lambda^2 + 1$ será um autovalor de S;

(e) $T \circ S = S \circ T$.

Solução. Podemos ver imediatamente através de um exemplo que a afirmação (a) não é necessariamente verdadeira. Seja $T : V \to V$ o operador dado por $Tv = iv$. Todo vetor não-nulo de V é autovetor de T com autovalor i, e portanto T é diagonalizável. No entanto, temos, para todo $v \in V$,

$$Sv = (T \circ T + \mathrm{I})v = T(Tv) + v = T(iv) + v = i \cdot iv + v = -v + v = 0\ ,$$

Isto mostra que S é o operador nulo, que certamente não é bijetor.

Para que a solução fique mais completa, vamos agora verificar que, de fato, cada uma das demais afirmações (b), (c), (d), (e) é verdadeira.

- Observe que $S \circ T = (T \circ T + \mathrm{I}) \circ T = T \circ T \circ T + T$, enquanto $T \circ S = T \circ (T \circ T + \mathrm{I}) = T = T \circ T \circ T + T$. Assim, $S \circ T = T \circ S$, e portanto a afirmação (e) é verdadeira.
- Suponha que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T, e seja $v \in V$ um autovetor com este autovalor. Então $Sv = (T \circ T + \mathrm{I})v = T(Tv) + v = T(\lambda v) + v = \lambda T(v) + v = \lambda^2 v + v = (\lambda^2 + 1)v$. Isto mostra que v é um autovetor de S com autovalor $\lambda^2 + 1$, e portanto a afirmação (d) é verdadeira.
- Suponha agora que S é o operador nulo, e seja $v \in \ker(T)$. Então $0 = Sv = (T \circ T + \mathrm{I})v = T(Tv) + v = T(0) + v = v$. Isto mostra que $\ker(T) = \{0\}$, ou seja, T é injetor. Como V tem dimensão finita, segue-se que T é também sobrejetor – e portanto bijetor. Portanto, a afirmação (c) também é verdadeira.
- Finalmente, suponha que T tem n autovalores reais distintos, digamos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, com autovetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, respectivamente. Então $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V. Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, temos $Sv_j = (\lambda_j^2 + 1)v_j$. Logo S é diagonalizável, e $D = [S]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal com os elementos não-nulos $\lambda_1^2 + 1, \lambda_2^2 + 1, \ldots, \lambda_n^2 + 1$ na diagonal principal. Como $\det(D) = (\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1) \cdots (\lambda_n^2 + 1) \neq 0$, vemos que D é inversível, e portanto S é bijetor. Isto mostra que a afirmação (b) também é verdadeira.

$\square$

Q12. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz real e suponha que i e $1 - 2i$ sejam raízes do polinômio característico de A. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) A possui um autovalor complexo com multiplicidade geométrica igual a 2;

(b) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$;

(c) A não possui autovalores reais;

(d) A não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(e) $-i$ é um autovalor de A.

Solução. Observe que o polinômio característico de A, a saber $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, é um polinômio de grau 4 com coeficientes *reais*. Assim, se $\alpha \in \mathbb{C}$ é raiz de p_A, então $\overline{\alpha}$ também é. Isso mostra que as raízes de p_A são i , $-i$, $1 - 2i$, $1 + 2i$. Em particular, A possui 4 autovalores complexos distintos, sendo portanto diagonalizável sobre $\mathbb{C}$. Além disso, A não pode ser diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, do contrário seus autovalores seriam reais. Concluímos que as afirmações (b), (c), (d), (e) são verdadeiras e, por exclusão, a afirmação falsa é (a). De fato, nenhum dos autovalores de A pode ter multiplicidade geométrica maior ou igual a 2, pois cada um deles possui multiplicidade algébrica igual a 1, e a multiplicidade geométrica é sempre menor ou igual à multiplicidade algébrica. $\square$

Q13. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Denote por A o conjunto formado pelos números reais a para os quais a equação

$$x^2 - 2axy + 5y^2 = 10$$

representa uma elipse. Assinale a alternativa correta:

(a) $A = \{a \in \mathbb{R} : |a| < \sqrt{5}\}$;
(b) $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 20\}$;
(c) A é o conjunto vazio;
(d) $A = \mathbb{R}$;
(e) $A = \{a \in \mathbb{R} : a = 0 \text{ ou } |a| > \sqrt{5}\}$.

Solução. A equação dada pode ser escrita sob a forma $X^t B X = 10$, onde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 5 \end{pmatrix} .$$

Como B é uma matriz *simétrica*, sabemos que existe uma matriz ortogonal M tal que $B = M^t D M$, onde D é a matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ e λ_1, λ_2 são os autovalores de B (que calcularemos abaixo). Introduzindo o vetor-coluna

$$Y = MX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ,$$

vemos que a equação $X^t B X = 10$ se reduz à equação $Y^t D Y = 10$, ou seja, à equação

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 10 .$$

A equação dada no enunciado representa uma elipse se, e somente se, esta última equação representa uma elipse; e isto ocorre se, e somente se, λ_1 e λ_2 são *estritamente positivos*. Mas λ_1 e λ_2 são as raízes do polinômio característico de B, a saber, $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + (5 - a^2)$. Tais raízes são $3 + \sqrt{a^2 + 4}$ e $3 - \sqrt{a^2 + 4}$. A primeira é sempre positiva, enquanto a segunda é positiva se e somente se $a^2 + 4 < 9$, o que ocorre se e somente se $|a| < \sqrt{5}$. Logo, a alternativa correta é (a).

$\square$

Q14. Seja V o espaço vetorial de todas as funções deriváveis $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ tais que a derivada f' seja contínua e $f(0) = 0$. Considere V munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) g'(x) \, \mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in V$. Seja W o subespaço vetorial de V gerado por:

$$\{x, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(2x)\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a uma base ortonormal de W:

(a) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(2x)\right\}$;
(b) $\left\{\frac{1}{2\pi}(x + x^2), \frac{1}{2\pi}(x - x^2), \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(2x)\right\}$;
(c) $\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(x + \operatorname{sen} x), \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(x - \operatorname{sen} x), \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(2x)\right\}$;
(d) $\left\{\frac{1}{2\pi}(1 - \cos x), \frac{1}{2\pi} x \operatorname{sen} x, \frac{1}{2\pi} x \operatorname{sen}(2x)\right\}$;
(e) $\{x, x + \operatorname{sen} x, x + \operatorname{sen}(2x)\}$.

Solução. Escrevendo $f_1(x) = x,\ f_2(x) = \operatorname{sen} x,\ f_3(x) = \operatorname{sen}(2x)$, sabemos que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de W. Para obter uma base ortonormal, em princípio devemos aplicar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores desta base. Observe no entanto que

$$\begin{aligned}
\langle f_1, f_2 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = 0 \ , \\
\langle f_2, f_3 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos x \cos(2x) \, \mathrm{d}x = 0 \ , \\
\langle f_3, f_1 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos(2x) \, \mathrm{d}x = 0 \ .
\end{aligned}$$

Em outras palavras, a base dada já é *ortogonal*. Para obter uma base *ortonormal*, basta dividir cada vetor da base por sua norma, ou seja, basta tomar $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ onde $\varphi_j = f_j / \|f_j\|$ $(j = 1, 2, 3)$. Mas temos

$$\begin{aligned}
\|f_1\|^2 &= \langle f_1, f_1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi \ , \\
\|f_2\|^2 &= \langle f_2, f_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \pi \ , \\
\|f_3\|^2 &= \langle f_3, f_3 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos^2(2x) \, \mathrm{d}x = 4\pi \ .
\end{aligned}$$

Assim, $\|f_1\| = \sqrt{2\pi}$, $\|f_2\| = \sqrt{\pi}$, $\|f_3\| = 2\sqrt{\pi}$. Portanto, temos

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \ , \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x \ , \quad \varphi_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(2x) \ .$$

Isto nos diz que a alternativa correta é (a).

$\square$

Q15. Assinale a alternativa correspondente à solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = 9x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo a condição $x(0) = 0$, $y(0) = 6$:

(a) $x(t) = -e^{-t} + e^{5t}$, $y(t) = 3e^{-t} + 3e^{5t}$;
(b) $x(t) = 0$, $y(t) = 6e^{5t}$;
(c) $x(t) = 2e^{-t} - 2e^{5t}$, $y(t) = 6e^{-t}$;
(d) $x(t) = e^{t} - e^{-t}$, $y(t) = 2e^{t} + 4e^{-t}$;
(e) $x(t) = 0$, $y(t) = 6$.

Solução. Na forma matricial, o sistema dado se escreve $X' = AX$, onde

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} .$$

Calculando o polinômio característico da matriz A, obtemos $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$. Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 5$, e portanto A é diagonalizável. Os vetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ são autovetores pertencentes a $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 5$, respectivamente. Assim, podemos escrever $A = P^{-1}DP$, onde

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Introduzindo o vetor-coluna $Y = PX$, vemos que o sistema $X' = AX$ se reduz ao sistema $Y' = DY$. Basta resolver este último em Y e calcular $X = P^{-1}Y$. Escrevendo $Y = \begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, vemos que o sistema $Y' = DY$ se reduz às equações diferenciais desacopladas

$$z'(t) = -z(t) \quad , \quad w'(t) = 5w(t) \ ,$$

cujas soluções gerais são $z(t) = ae^{-t}$ e $w(t) = be^{5t}$, respectivamente, onde a, b são constantes reais quaisquer. Como $X = P^{-1}Y$, concluímos que a solução geral do sistema $X' = AX$ é dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-t} + be^{5t} \\ -3ae^{-t} + 3be^{5t} \end{pmatrix} .$$

Ou seja, $x(t) = ae^{-t} + be^{5t}$ e $y(t) = -3ae^{-t} + 3be^{5t}$. Mas as condições iniciais dadas são $x(0) = 0$ e $y(0) = 6$, e portanto devemos ter $a + b = 0$ e $-3a + 3b = 6$. Isto nos diz que $a = -1$ e $b = 1$. Concluímos que a solução procurada é $x(t) = -e^{-t} + e^{5t}$, $y(t) = 3e^{-t} + 3e^{5t}$, e portanto a alternativa correta é (a). $\square$

Q16. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 2z = 0\}.$$

Se $v \in S$ e $w \in S^\perp$ forem tais que $v + w = (1, 1, 1)$, então:

(a) $w = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$;
(b) $w = (1, 0, 1)$;
(c) $w = (-1, 1, 3)$;
(d) $w = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;
(e) $w = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$.

Solução. Observe que o vetor $w_0 = (1, 2, 2)$ está em $S^\perp$, pela própria definição de S. Sabemos que $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$, e claramente $\dim(S) = 2$; logo $\dim(S^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(S) = 1$. Portanto, $S^\perp$ é o subespaço gerado por w_0 (ou seja, $S^\perp = [(1, 2, 2)]$). Assim, se $(1, 1, 1) = v + w$ com $v \in S$ e $w \in S^\perp$, então $w = \alpha w_0 = (\alpha, 2\alpha, 2\alpha)$ para um certo $\alpha \in \mathbb{R}$ que vamos determinar. Como o vetor $v = (1, 1, 1) - w = (1 - \alpha, 1 - 2\alpha, 1 - 2\alpha)$ está em S, temos $\langle v, w_0 \rangle = 0$, ou seja

$$(1 - \alpha) + 2(1 - 2\alpha) + 2(1 - 2\alpha) = 0 .$$

Resolvendo, obtemos $\alpha = \frac{5}{9}$. Logo,

$$w = \alpha \cdot w_0 = \frac{5}{9} \cdot (1, 2, 2) = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right) ,$$

e portanto a alternativa correta é (a). □