

Q1. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com \mathcal{B} uma base ortonormal. A equação

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$$

representa:

- (a) um par de retas paralelas;
- (b) uma parábola;
- (c) uma hipérbole;
- (d) um par de retas concorrentes;
- (e) uma elipse.

Q2. Seja \mathcal{B} a base de \mathbb{R}^2 dada por

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$$

e considere o espaço vetorial \mathbb{R}^2 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que \mathcal{B} seja uma base ortonormal. Seja A o conjunto formado pelos números reais a para os quais o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 3a-4 & -a+5 \end{pmatrix}$$

seja simétrico, em que can denota a base canônica de \mathbb{R}^2 . Assinale a alternativa correta:

- (a) $A = \{\frac{3}{2}\}$;
- (b) $A = \{2\}$;
- (c) $A = \mathbb{R}$;
- (d) $A = \{\frac{2}{3}\}$;
- (e) A é vazio.

Q3. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + b + (a - c + d)t + (b + c - d)t^2,$$

para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- (a) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (b) $\dim(\text{Ker}(T)) > \dim(\text{Im}(T))$;
- (c) T é injetora;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$;
- (e) T é sobrejetora.

Q4. Considere a base \mathcal{B} de $P_1(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{B} = \{1 - t, 3 + 3t\}$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1 - t^2) = (1, -1)_{\mathcal{B}}, \quad T(t - t^2) = (1, 1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad T(t^2) = (2, 0)_{\mathcal{B}}.$$

Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos que $T(a + bt + ct^2)$ é igual a:

- (a) $3a + 3b + 2c + (-a + b)t$;
- (b) $-a - b + 2c + (-a + b)t$;
- (c) $6b + 2c - (6a + 2c)t$;
- (d) $a + c + \frac{1}{3}(-a + c)t$;
- (e) $b + 3c + (a + b + c)t$.

Q5. Considere o operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ definido por

$$T(p)(t) = (t - 1)p'(t),$$

para qualquer $p \in P_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- (a) T é diagonalizável e bijetor;
- (b) T não é nem diagonalizável, nem sobrejetor;
- (c) T é diagonalizável e não é sobrejetor;
- (d) T é diagonalizável, sobrejetor e não é injetor;
- (e) T não é diagonalizável e é sobrejetor.

Q6. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que 11 e 22 sejam os únicos autovalores de T e tal que

$$(1, 1, 1) \in \text{Ker}(T - 11I) \quad \text{e} \quad (0, 1, -1) \in \text{Ker}(T - 22I),$$

em que I denota o operador identidade de \mathbb{R}^3 . Pode-se afirmar que:

- (a) T será simétrico se, e somente se, $T(-2, 1, 1)$ for igual a $(-44, 22, 22)$;
- (b) T será simétrico se, e somente se, $T(-2, 1, 1)$ for igual a $(-22, 11, 11)$ ou $T(-2, 1, 1)$ for igual a $(-44, 22, 22)$;
- (c) T não é simétrico;
- (d) T é simétrico;
- (e) T será simétrico se, e somente se, $T(-2, 1, 1)$ for igual a $(-22, 11, 11)$.

Q7. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual e seja W o subespaço vetorial de \mathbb{R}^4 definido por:

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, 4x - 3z - t = 0 \text{ e } x - 5y + 3z + t = 0\}.$$

Temos que W^\perp é igual a:

- (a) $[(-5, 1, 3, 1), (1, -1, 1, -1)]$;
- (b) $[(-4, 0, 3, 1)]$;
- (c) $[(-1, 1, 0, 0), (-4, 0, 3, 1)]$;
- (d) $[(-5, 1, 3, 1)]$;
- (e) $[(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -2)]$.

Q8. Denote por $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 . Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ for um produto interno em \mathbb{R}^2 , com norma correspondente denotada por $\|\cdot\|$, tal que $\|e_1\| = 4$, $\|e_2\| = 3$ e $\langle e_1, e_2 \rangle = 2$, então $\langle (1, 1), (1, -2) \rangle = -4$;

(II) se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ for o produto interno em $P_2(\mathbb{R})$ definido por

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$, então $\|1 + t^2\| = 5$, em que $\|\cdot\|$ denota a norma correspondente a $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

(III) para quaisquer funções contínuas $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, vale a desigualdade:

$$\int_0^5 f(t)g(t) dt \leq \int_0^5 (f(t))^2 dt \int_0^5 (g(t))^2 dt.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q9. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale que a matriz

$$\begin{pmatrix} a & e^{33} & -\pi \\ e^{33} & b & \sqrt{5} \\ -\pi & \sqrt{5} & c \end{pmatrix}$$

é diagonalizável sobre \mathbb{R} ;

(II) se $e_1, e_2, e_3 \in V$ forem vetores dois a dois ortogonais com normas iguais a 1 e se λ_1, λ_2 e λ_3 forem números reais tais que $T(e_1) = \lambda_1 e_1$, $T(e_2) = \lambda_2 e_2$ e $T(e_3) = \lambda_3 e_3$, então λ_1, λ_2 e λ_3 serão dois a dois distintos;

(III) o operador $T \circ T$ é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (e) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.

Q10. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Denote por W o subespaço vetorial de $P_2(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios t e t^2 . Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $at + bt^2$ seja a projeção ortogonal de $1 + t$ em W , então $a - 3b$ será igual a:

- (a) -1 ;
- (b) -3 ;
- (c) -4 ;
- (d) 0 ;
- (e) -2 .

Q11. Seja A o conjunto formado pelos números reais $a \in \mathbb{R}$ tais que a matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & a & 4 - a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$$

seja diagonalizável sobre \mathbb{R} . Assinale a alternativa correta:

- (a) $A =]1, +\infty[$;
- (b) $A =]0, +\infty[$;
- (c) $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 0 \text{ e } a \neq 1\}$;
- (d) $A = \mathbb{R}$;
- (e) $A =]0, 1[$.

Q12. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real diagonalizável sobre \mathbb{C} e suponha que 3 e $1+i$ sejam autovalores de A associados, respectivamente, aos autovetores $(1, 1, 0)$ e $(i, 0, 1)$. Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, 1, 1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- (a) $(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{3\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$;
- (b) $(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}, -e^{\frac{3\pi}{2}}, -e^{\frac{\pi}{2}})$;
- (c) $(e^{\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}, -e^{\frac{3\pi}{2}}, -e^{\frac{\pi}{2}})$;
- (d) $(e^{\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{3\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$;
- (e) $(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}, -e^{\frac{3\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$.

Q13. Sejam n um inteiro positivo e $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz real simétrica. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se \mathbb{R}^n estiver munido do seu produto interno usual e $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ for um operador linear tal que $[T]_{\mathcal{B}} = A$ para alguma base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n , então autovetores de T associados a autovalores distintos de T serão ortogonais;
- (II) todos os autovalores complexos de A são reais;
- (III) se os únicos autovalores reais de A forem -2 e -5 , em que -2 tenha multiplicidade algébrica igual a 1 , e se $n = 3$, então a multiplicidade geométrica do autovalor -5 será igual a 2 .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q14. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 4 e sejam \mathcal{B} e \mathcal{C} bases de V . Considere a transformação linear $T : V \rightarrow V$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) existem uma transformação linear bijetora $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Im}(T)$ e uma transformação linear bijetora $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Ker}(T)$;
- (b) existe uma transformação linear injetora $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Im}(T)$ e, para qualquer transformação linear $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Ker}(T)$, vale que $\text{Ker}(S) \neq \{0\}$;
- (c) existe uma transformação linear bijetora $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Ker}(T)$ e, para qualquer transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Im}(T)$, vale que $\text{Ker}(L) \neq \{0\}$;
- (d) existem uma transformação linear sobrejetora $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Im}(T)$ e uma transformação linear bijetora $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Ker}(T)$;
- (e) existe uma transformação linear bijetora $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Im}(T)$ e, para qualquer transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Ker}(T)$, vale que $\text{Ker}(S) \neq \{0\}$.

Q15. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{99} é igual a:

- (a) $\begin{pmatrix} 4^{99} & -4^{99}\sqrt{3} \\ 4^{99}\sqrt{3} & 4^{99} \end{pmatrix}$;
- (b) $\begin{pmatrix} 4^{99} & 4^{99}\sqrt{3} \\ -4^{99}\sqrt{3} & 4^{99} \end{pmatrix}$;
- (c) $\begin{pmatrix} -4^{99} & 0 \\ 0 & -4^{99} \end{pmatrix}$;
- (d) $\begin{pmatrix} -4^{99} & -4^{99}\sqrt{3} \\ 4^{99}\sqrt{3} & -4^{99} \end{pmatrix}$;
- (e) $\begin{pmatrix} 4^{99} & 0 \\ 0 & 4^{99} \end{pmatrix}$.

Q16. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, W um subespaço vetorial de V e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Suponha que $T(v) \in W$ para todo $v \in V$ e que $T(v) - v$ seja ortogonal a w , para todo $v \in V$ e todo $w \in W$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\text{Ker}(T) = W$ e $\text{Im}(T) = W^\perp$;
- (II) para qualquer base ortonormal \mathcal{B} de V , vale que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica;
- (III) $V = \text{Ker}(T) + \text{Ker}(T - I)$ e $\text{Ker}(T) \cap \text{Ker}(T - I) = \{0\}$, em que I denota o operador identidade de V .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.