Q1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que 11 e 22 sejam os únicos autovalores de T e tal que

$$(1,1,1) \in \mathrm{Ker}(T - 11\mathrm{I}) \quad \text{e} \quad (0,1,-1) \in \mathrm{Ker}(T - 22\mathrm{I}),$$

em que I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Pode-se afirmar que:

(a) T será simétrico se, e somente se, $T(-2,1,1)$ for igual a $(-22,11,11)$;

(b) T será simétrico se, e somente se, $T(-2,1,1)$ for igual a $(-44,22,22)$;

(c) T não é simétrico;

(d) T é simétrico;

(e) T será simétrico se, e somente se, $T(-2,1,1)$ for igual a $(-22,11,11)$ ou $T(-2,1,1)$ for igual a $(-44,22,22)$.

Q2. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{99} é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} -4^{99} & 0 \\ 0 & -4^{99} \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 4^{99} & -4^{99}\sqrt{3} \\ 4^{99}\sqrt{3} & 4^{99} \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 4^{99} & 0 \\ 0 & 4^{99} \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} -4^{99} & -4^{99}\sqrt{3} \\ 4^{99}\sqrt{3} & -4^{99} \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 4^{99} & 4^{99}\sqrt{3} \\ -4^{99}\sqrt{3} & 4^{99} \end{pmatrix}$.

Q3. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale que a matriz
$$\begin{pmatrix} a & e^{33} & -\pi \\ e^{33} & b & \sqrt{5} \\ -\pi & \sqrt{5} & c \end{pmatrix}$$
é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(II) se $e_1, e_2, e_3 \in V$ forem vetores dois a dois ortogonais com normas iguais a 1 e se λ_1, λ_2 e λ_3 forem números reais tais que $T(e_1) = \lambda_1 e_1$, $T(e_2) = \lambda_2 e_2$ e $T(e_3) = \lambda_3 e_3$, então λ_1, λ_2 e λ_3 serão dois a dois distintos;

(III) o operador $T \circ T$ é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

(a) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q4. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por
$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + b + (a - c + d)t + (b + c - d)t^2,$$
para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;
(b) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) > \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;
(c) T é sobrejetora;
(d) T é injetora;
(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.

Q5. Sejam n um inteiro positivo e $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz real simétrica. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\mathbb{R}^n$ estiver munido do seu produto interno usual e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for um operador linear tal que $[T]_{\mathcal{B}} = A$ para alguma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, então autovetores de T associados a autovalores distintos de T serão ortogonais;

(II) todos os autovalores complexos de A são reais;

(III) se os únicos autovalores reais de A forem -2 e -5, em que -2 tenha multiplicidade algébrica igual a 1, e se $n = 3$, então a multiplicidade geométrica do autovalor -5 será igual a 2.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q6. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja W o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$W = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0,\ 4x - 3z - t = 0 \text{ e } x - 5y + 3z + t = 0\big\}.$$

Temos que $W^\perp$ é igual a:

(a) $[(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -2)]$;
(b) $[(-5, 1, 3, 1), (1, -1, 1, -1)]$;
(c) $[(-5, 1, 3, 1)]$;
(d) $[(-1, 1, 0, 0), (-4, 0, 3, 1)]$;
(e) $[(-4, 0, 3, 1)]$.

Q7. Considere o operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definido por

$$T(p)(t) = (t - 1)p'(t),$$

para qualquer $p \in P_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

(a) T é diagonalizável e bijetor;
(b) T não é diagonalizável e é sobrejetor;
(c) T não é nem diagonalizável, nem sobrejetor;
(d) T é diagonalizável e não é sobrejetor;
(e) T é diagonalizável, sobrejetor e não é injetor.

Q8. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Denote por W o subespaço vetorial de $P_2(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios t e t^2. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $at + bt^2$ seja a projeção ortogonal de $1 + t$ em W, então $a - 3b$ será igual a:

(a) -2;
(b) -3;
(c) 0;
(d) -1;
(e) -4.

Q9. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, W um subespaço vetorial de V e $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que $T(v) \in W$ para todo $v \in V$ e que $T(v) - v$ seja ortogonal a w, para todo $v \in V$ e todo $w \in W$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\mathrm{Ker}(T) = W$ e $\mathrm{Im}(T) = W^{\perp}$;
(II) para qualquer base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, vale que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica;
(III) $V = \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})$ e $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = \{0\}$, em que I denota o operador identidade de V.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q10. Considere a base $\mathcal{B}$ de $P_1(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{B} = \{1-t, 3+3t\}$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1-t^2) = (1,-1)_{\mathcal{B}}, \quad T(t-t^2) = (1,1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad T(t^2) = (2,0)_{\mathcal{B}}.$$

Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos que $T(a+bt+ct^2)$ é igual a:

(a) $3a + 3b + 2c + (-a+b)t$;
(b) $b + 3c + (a+b+c)t$;
(c) $6b + 2c - (6a+2c)t$;
(d) $a + c + \frac{1}{3}(-a+c)t$;
(e) $-a - b + 2c + (-a+b)t$.

Q11. Denote por $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ for um produto interno em $\mathbb{R}^2$, com norma correspondente denotada por $\| \cdot \|$, tal que $\|e_1\| = 4$, $\|e_2\| = 3$ e $\langle e_1, e_2 \rangle = 2$, então $\langle (1,1), (1,-2) \rangle = -4$;

(II) se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ for o produto interno em $P_2(\mathbb{R})$ definido por

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$, então $\|1+t^2\| = 5$, em que $\| \cdot \|$ denota a norma correspondente a $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

(III) para quaisquer funções contínuas $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,5] \to \mathbb{R}$, vale a desigualdade:

$$\int_0^5 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^5 \big(f(t)\big)^2 \mathrm{d}t \int_0^5 \big(g(t)\big)^2 \mathrm{d}t.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q12. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 4 e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de V. Considere a transformação linear $T : V \to V$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) existem uma transformação linear bijetora $L : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Im}(T)$ e uma transformação linear bijetora $S : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Ker}(T)$;

(b) existe uma transformação linear bijetora $S : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Ker}(T)$ e, para qualquer transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Im}(T)$, vale que $\mathrm{Ker}(L) \neq \{0\}$;

(c) existe uma transformação linear bijetora $L : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Im}(T)$ e, para qualquer transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Ker}(T)$, vale que $\mathrm{Ker}(S) \neq \{0\}$;

(d) existem uma transformação linear sobrejetora $L : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Im}(T)$ e uma transformação linear bijetora $S : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Ker}(T)$;

(e) existe uma transformação linear injetora $L : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Im}(T)$ e, para qualquer transformação linear $S : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Ker}(T)$, vale que $\mathrm{Ker}(S) \neq \{0\}$.

Q13. Seja A o conjunto formado pelos números reais $a \in \mathbb{R}$ tais que a matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & a & 4-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$$

seja diagonalizável sobre $\mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) $A =]1, +\infty[$;

(b) $A = \mathbb{R}$;

(c) $A =]0, 1[$;

(d) $A =]0, +\infty[$;

(e) $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 0 \text{ e } a \neq 1\}$.

Q14. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. A equação

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$$

representa:

(a) uma hipérbole;

(b) um par de retas concorrentes;

(c) uma elipse;

(d) um par de retas paralelas;

(e) uma parábola.

Q15. Seja $\mathcal{B}$ a base de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(1,2)\}$$

e considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que $\mathcal{B}$ seja uma base ortonormal. Seja A o conjunto formado pelos números reais a para os quais o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 3a-4 & -a+5 \end{pmatrix}$$

seja simétrico, em que can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Assinale a alternativa correta:

(a) $A = \{\frac{3}{2}\}$;
(b) $A = \mathbb{R}$;
(c) $A = \{2\}$;
(d) A é vazio;
(e) $A = \{\frac{2}{3}\}$.

Q16. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ e suponha que 3 e $1+i$ sejam autovalores de A associados, respectivamente, aos autovetores $(1,1,0)$ e $(i,0,1)$. Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,1,1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

(a) $(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{3\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$;
(b) $(e^{\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}, -e^{\frac{3\pi}{2}}, -e^{\frac{\pi}{2}})$;
(c) $(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}, -e^{\frac{3\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$;
(d) $(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}, -e^{\frac{3\pi}{2}}, -e^{\frac{\pi}{2}})$;
(e) $(e^{\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{3\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$.