Q1. Sejam V um espaço vetorial e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que -1, 1, 2 e 3 sejam autovalores de T. Denote por I o operador identidade de V. Assinale a alternativa contendo números reais que necessariamente são autovalores de $3\mathrm{I} - 2T + 4(T \circ T)$:

(a) -9, 5, 15 e 33;
(b) -5, 5, 9 e 33;
(c) -5, 5, 9 e 15;
(d) 5, 9, 15 e 33;
(e) -5, 5, 15 e 33.

Q2. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ e suponha que

$$(0,1,1), \quad (0,1,-1) \quad \text{e} \quad (1,0,-1)$$

sejam autovetores de A associados, respectivamente, aos autovalores 1, -1 e 0. Temos que A é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q3. Considere a base
$$\mathcal{B} = \{(1,1),(0,1)\}$$
de $\mathbb{R}^2$, a base
$$\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$$
de $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que:
$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Dados $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $T(a,b)$ é igual a:

(a) $(2b - a, b, 2a - b)$;
(b) $(a + 2b, b, 0)$;
(c) $(2b - a, b - 2a, 0)$;
(d) $(2b - a, b - 2a, 2a - b)$;
(e) $(a + 2b, b - a, a - b)$.

Q4. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$
e considere as seguintes afirmações:

(I) A é simétrica e não é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$;
(II) A possui um autovalor com multiplicidade algébrica igual a 2;
(III) A é inversível.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) nenhuma das afirmações é verdadeira;
(e) todas as afirmações são verdadeiras.

Q5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(1-t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T(1-t+2t^2) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

(a) $a - b \neq 2$;
(b) $a - b = 2$;
(c) $a \neq b$;
(d) $a + b = 4$;
(e) $a + b \neq 4$.

Q6. Considere o espaço vetorial $P_5(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P_5(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a+bt$ seja o elemento de $P_1(\mathbb{R})$ mais próximo de t^5, então $a + b$ será igual a:

(a) $\frac{5}{7}$;
(b) $\frac{11}{21}$;
(c) $\frac{6}{7}$;
(d) $-\frac{4}{21}$;
(e) $\frac{19}{21}$.

Q7. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Sabe-se que $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são autovetores de A associados ao autovalor 2 e que $(1, 1, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 3. Seja X a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (-1, 2, 1)$. Temos que $X(1)$ é igual a:

(a) $(3e^2 + e^3, -e^2 + e^3, 2e^2 + e^3)$;
(b) $(2e^2 + e^3, 6e^2 + e^3, 4e^2 + e^3)$;
(c) $(e^2 - 2e^3, 4e^2 - 2e^3, 3e^2 - 2e^3)$;
(d) $(e^2 - e^3, 4e^2 - e^3, 3e^2 - e^3)$;
(e) $(2e^2 - 2e^3, 6e^2 - 2e^3, 4e^2 - 2e^3)$.

Q8. Considere o operador linear $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$T(z,w) = (iz - iw, 2iz + 4iw),$$

para qualquer $(z,w) \in \mathbb{C}^2$. Assinale a alternativa correspondente a uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^2$ tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal:

(a) $\mathcal{B} = \{(3,5),(1,2+3i)\}$;
(b) $\mathcal{B} = \{(2i,3i),(0,1+2i)\}$;
(c) $\mathcal{B} = \{(1,-3),(-4,7)\}$;
(d) $\mathcal{B} = \{(1+i,-2-2i),(1,-1)\}$;
(e) $\mathcal{B} = \{(-1,2),(4,i)\}$.

Q9. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O,\mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a equação:

$$2axy + (a^2-1)y^2 + 2x - y - 1 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) se $a = 1$, então a equação representará um par de retas concorrentes;
(b) se $a < -1$, então o conjunto solução da equação será vazio;
(c) a equação representa uma hipérbole, para qualquer valor de a;
(d) se $a > 1$, então a equação representará uma elipse;
(e) se $a = -1$, então a equação representará uma parábola.

Q10. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^{\mathrm{t}}A),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que B^{t} denota a transposta da matriz B e $\mathrm{tr}(C)$ denota o traço de uma matriz C, isto é, a soma das entradas na diagonal principal de C. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ um operador linear simétrico cujo polinômio característico seja dado por:

$$p_T(t) = (t+1)(t-1)(t-2)^2.$$

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e denote por I o operador identidade de $M_2(\mathbb{R})$. Suponha que

$$\mathrm{Ker}(T+\mathrm{I}) = [A_1], \quad \mathrm{Ker}(T-\mathrm{I}) = [A_2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T-2\mathrm{I}) = [A_3, A_4],$$

em que:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $a + b + c$ é igual a:

(a) -8;
(b) -11;
(c) 7;
(d) 6;
(e) -13.

Q11. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 - y^2 + 7z^2 - 6yz = 4.$$

Uma equação reduzida para essa quádrica é:

(a) $3p^2 - 8q^2 - 2r^2 = 4$;
(b) $3p^2 + 8q^2 - 2r^2 = 4$;
(c) $3p^2 + 8q^2 + 2r^2 = 4$;
(d) $3p^2 + 4q^2 + 2r^2 = 4$;
(e) $3p^2 + 4q^2 + 2r^2 = 1$.

Q12. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que o polinômio

$$p_1(t) = 1 + t + t^2$$

seja um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, o polinômio

$$p_2(t) = t + t^2$$

seja um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$ e tal que $\mathrm{Ker}(T)$ seja igual ao subespaço vetorial gerado pelo polinômio $p_3(t) = t^2$. Temos que $T(3 - 2t + t^2)$ é igual a:

(a) $3 + 8t + 8t^2$;
(b) $3 + 5t + 5t^2$;
(c) $3 + 7t + 7t^2$;
(d) $3 + 4t + 4t^2$;
(e) $3 + t + t^2$.

Q13. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(2,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) T é simétrico;
(II) T é diagonalizável;
(III) T é inversível e $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$ são autovalores de T^{-1}.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q14. Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear tal que 1, $1-i$ e $1+i$ sejam autovalores de T e considere as seguintes afirmações:

(I) T é diagonalizável;

(II) T é inversível e $\frac{1+i}{2}$ é um autovalor de T^{-1};

(III) $T \circ T - 5T + 6\mathrm{I}$ é um operador inversível, em que I denota o operador identidade de $\mathbb{C}^3$.

Assinale a alternativa correta:

(a) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q15. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2i \\ -4i & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

e seja $B = A^{-1}$. Temos que $A^{111} + B^{222}$ é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 4i & 0 \end{pmatrix}$;
(b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4i & 0 \end{pmatrix}$;
(c) $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$;
(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -2i \end{pmatrix}$;
(e) $\begin{pmatrix} 4 & -2i \\ -4i & -2 \end{pmatrix}$.

Q16. Se

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

então a soma das duas entradas na primeira linha da matriz A^{33} será igual a:

(a) 3^{33};
(b) $2 \cdot 3^{33}$;
(c) $\frac{1}{2}(5^{33} + 3^{33})$;
(d) 5^{33};
(e) $2 \cdot 5^{33}$.