

Q1. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Sabe-se que $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são autovetores de A associados ao autovalor 2 e que $(1, 1, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 3. Seja X a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (-1, 2, 1)$. Temos que $X(1)$ é igual a:

- (a) $(2e^2 - 2e^3, 6e^2 - 2e^3, 4e^2 - 2e^3)$;
- (b) $(e^2 - e^3, 4e^2 - e^3, 3e^2 - e^3)$;
- (c) $(3e^2 + e^3, -e^2 + e^3, 2e^2 + e^3)$;
- (d) $(2e^2 + e^3, 6e^2 + e^3, 4e^2 + e^3)$;
- (e) $(e^2 - 2e^3, 4e^2 - 2e^3, 3e^2 - 2e^3)$.

Q2. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

em que \mathcal{B} é a base de \mathbb{R}^3 dada por:

$$\mathcal{B} = \{(2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) T é simétrico;
- (II) T é diagonalizável;
- (III) T é inversível e $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$ são autovalores de T^{-1} .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q3. Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$$

de \mathbb{R}^2 , a base

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

de \mathbb{R}^3 e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $T(a, b)$ é igual a:

- (a) $(a + 2b, b - a, a - b)$;
- (b) $(a + 2b, b, 0)$;
- (c) $(2b - a, b - 2a, 2a - b)$;
- (d) $(2b - a, b - 2a, 0)$;
- (e) $(2b - a, b, 2a - b)$.

Q4. Se

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

então a soma das duas entradas na primeira linha da matriz A^{33} será igual a:

- (a) $2 \cdot 5^{33}$;
- (b) $2 \cdot 3^{33}$;
- (c) $\frac{1}{2}(5^{33} + 3^{33})$;
- (d) 5^{33} ;
- (e) 3^{33} .

Q5. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2i \\ -4i & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

e seja $B = A^{-1}$. Temos que $A^{111} + B^{222}$ é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -2i \\ -4i & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4i & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -2i \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 4i & 0 \end{pmatrix}$.

Q6. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com \mathcal{B} uma base ortonormal. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a equação:

$$2axy + (a^2 - 1)y^2 + 2x - y - 1 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) se $a = -1$, então a equação representará uma parábola;
- (b) se $a > 1$, então a equação representará uma elipse;
- (c) se $a < -1$, então o conjunto solução da equação será vazio;
- (d) se $a = 1$, então a equação representará um par de retas concorrentes;
- (e) a equação representa uma hipérbole, para qualquer valor de a .

Q7. Considere o operador linear $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por

$$T(z, w) = (iz - iw, 2iz + 4iw),$$

para qualquer $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Assinale a alternativa correspondente a uma base \mathcal{B} de \mathbb{C}^2 tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal:

- (a) $\mathcal{B} = \{(-1, 2), (4, i)\}$;
- (b) $\mathcal{B} = \{(1, -3), (-4, 7)\}$;
- (c) $\mathcal{B} = \{(2i, 3i), (0, 1 + 2i)\}$;
- (d) $\mathcal{B} = \{(1 + i, -2 - 2i), (1, -1)\}$;
- (e) $\mathcal{B} = \{(3, 5), (1, 2 + 3i)\}$.

Q8. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ e suponha que

$$(0, 1, 1), \quad (0, 1, -1) \quad \text{e} \quad (1, 0, -1)$$

sejam autovetores de A associados, respectivamente, aos autovalores 1, -1 e 0. Temos que A é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Q9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(1-t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T(1-t+2t^2) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

(a) $a \neq b;$

(b) $a + b \neq 4;$

(c) $a + b = 4;$

(d) $a - b = 2;$

(e) $a - b \neq 2.$

Q10. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que o polinômio

$$p_1(t) = 1 + t + t^2$$

seja um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, o polinômio

$$p_2(t) = t + t^2$$

seja um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$ e tal que $\text{Ker}(T)$ seja igual ao subespaço vetorial gerado pelo polinômio $p_3(t) = t^2$. Temos que $T(3 - 2t + t^2)$ é igual a:

- (a) $3 + 8t + 8t^2$;
- (b) $3 + 7t + 7t^2$;
- (c) $3 + t + t^2$;
- (d) $3 + 5t + 5t^2$;
- (e) $3 + 4t + 4t^2$.

Q11. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

e considere as seguintes afirmações:

- (I) A é simétrica e não é diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (II) A possui um autovalor com multiplicidade algébrica igual a 2;
- (III) A é inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (a) nenhuma das afirmações é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q12. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que B^t denota a transposta da matriz B e $\text{tr}(C)$ denota o traço de uma matriz C , isto é, a soma das entradas na diagonal principal de C . Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ um operador linear simétrico cujo polinômio característico seja dado por:

$$p_T(t) = (t + 1)(t - 1)(t - 2)^2.$$

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e denote por I o operador identidade de $M_2(\mathbb{R})$. Suponha que

$$\text{Ker}(T + I) = [A_1], \quad \text{Ker}(T - I) = [A_2] \quad \text{e} \quad \text{Ker}(T - 2I) = [A_3, A_4],$$

em que:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $a + b + c$ é igual a:

- (a) 6;
- (b) -11;
- (c) -8;
- (d) -13;
- (e) 7.

Q13. Sejam V um espaço vetorial e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $-1, 1, 2$ e 3 sejam autovalores de T . Denote por I o operador identidade de V . Assinale a alternativa contendo números reais que necessariamente são autovalores de $3I - 2T + 4(T \circ T)$:

- (a) $-5, 5, 9$ e 33 ;
- (b) $5, 9, 15$ e 33 ;
- (c) $-5, 5, 15$ e 33 ;
- (d) $-9, 5, 15$ e 33 ;
- (e) $-5, 5, 9$ e 15 .

Q14. Seja $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ um operador linear tal que 1 , $1 - i$ e $1 + i$ sejam autovalores de T e considere as seguintes afirmações:

- (I) T é diagonalizável;
- (II) T é inversível e $\frac{1+i}{2}$ é um autovalor de T^{-1} ;
- (III) $T \circ T - 5T + 6I$ é um operador inversível, em que I denota o operador identidade de \mathbb{C}^3 .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (e) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.

Q15. Considere o espaço vetorial $P_5(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P_5(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento de $P_1(\mathbb{R})$ mais próximo de t^5 , então $a + b$ será igual a:

- (a) $\frac{6}{7}$;
- (b) $\frac{11}{21}$;
- (c) $\frac{19}{21}$;
- (d) $-\frac{4}{21}$;
- (e) $\frac{5}{7}$.

Q16. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com \mathcal{B} uma base ortonormal. Considere a quádrlica de equação:

$$3x^2 - y^2 + 7z^2 - 6yz = 4.$$

Uma equação reduzida para essa quádrlica é:

- (a) $3p^2 + 4q^2 + 2r^2 = 1$;
- (b) $3p^2 + 4q^2 + 2r^2 = 4$;
- (c) $3p^2 - 8q^2 - 2r^2 = 4$;
- (d) $3p^2 + 8q^2 - 2r^2 = 4$;
- (e) $3p^2 + 8q^2 + 2r^2 = 4$.