Nesta prova, se V é um espaço vetorial, o vetor nulo de V será denotado por 0_V. Se $u_1, \dots, u_n$ forem vetores de V, o subespaço de V gerado por $\{u_1, \dots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \dots, u_n]$. Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V, a projeção ortogonal de um vetor $u \in V$ sobre S, se existir, será denotada por $\operatorname{proj}_S u$.

Em $\mathbb{R}^n$, o produto interno usual é dado por $\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$.

Se A é uma matriz quadrada, A^t denota a matriz transposta de A e $\operatorname{tr}(A)$ denota o traço de A, isto é, a soma das entradas na diagonal principal de A.

Q1. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual e seja T um operador linear de $\mathbb{R}^2$ que satisfaz $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e suponha que $T(1,0) = (a,b)$ e $T(0,1) = (b,a)$. Nessa situação, considere as seguintes afirmações:

(I) $ab = 0$
(II) $a^2 + b^2 = 1$
(III) $a \geq 0$ e $b \geq 0$

Está correto o que se afirma em

(a) (I), (II) e (III).
(b) (I), apenas.
(c) (I) e (II), apenas.
(d) (I) e (III), apenas.
(e) (II) e (III), apenas.

Q2. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Assinale a alternativa que contém uma implicação que é necessariamente verdadeira.

(a) Se T é injetora, então $\dim U = \dim V$.
(b) Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de U, então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é uma base de $\operatorname{Im}(T)$.
(c) Se $\dim V \leq \dim U - \dim \operatorname{Ker}(T)$, então T é sobrejetora.
(d) Se $\dim V - \dim \operatorname{Im}(T) = \dim U$, então T é injetora.
(e) Se $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T)$, então T é sobrejetora.

Q3. Considere o subespaço $S = [(1,-1,1,2),(0,1,-2,0),(0,0,1,-3)]$ de $\mathbb{R}^4$ e o vetor $v = (3,-1,4,2)$. Se $\mathbb{R}^4$ está munido do produto interno usual, e $v = v_1 + v_2$, com $v_1 \in S$ e $v_2 = (a,b,c,d) \in S^\perp$, então $47(a+b+c+d)$ é igual a

(a) 83
(b) 130
(c) 121
(d) 2
(e) 11

Q4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e a transformação linear $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = XA - AX$, para todo $X \in M_2(\mathbb{R})$. Nessas condições, $\dim \operatorname{Im}(T)$ é igual a

(a) 4
(b) 1
(c) 0
(d) 3
(e) 2

Q5. Se $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ é o operador linear que satisfaz $T(1+t) = 2 - 3t + t^2$, $T(1+t^2) = 1 + t + 2t^2$ e $T(t+t^2) = -1 - 2t + 5t^2$, e $a,b,c \in \mathbb{R}$ são tais que $T(3 - 2t + 4t^2) = a + bt + ct^2$, então $a+b+c$ é igual a

(a) 25
(b) 5
(c) 13
(d) 10
(e) 17

Q6. A respeito das afirmações

(I) Existe um operador linear $T\colon P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

(II) A função $T\colon P_5(\mathbb{R}) \to P_5(\mathbb{R})$ definida por $T\big(p(t)\big) = p(t+1)$, para todo $p(t) \in P_5(\mathbb{R})$, é uma transformação linear.

(III) Se E e F são espaços vetoriais de dimensão finita e $T\colon E \to F$ é uma transformação linear, então T é injetora se, e somente se, $\dim E \leq \dim F$.

é correto afirmar que

(a) (I), (II) e (III) são falsas.
(b) apenas (III) é verdadeira.
(c) (I), (II) e (III) são verdadeiras.
(d) apenas (II) é verdadeira.
(e) apenas (II) e (III) são verdadeiras.

Q7. Em $P(\mathbb{R})$, com o produto interno definido por $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(t)q(t)\,dt$, seja $a + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$, o polinomio de grau menor ou igual a 1 mais proximo do polinômio t^7. Então, $12(a+b)$ é igual a

(a) 4
(b) 5
(c) 7
(d) 6
(e) 9

Q8. Considere as seguintes afirmações sobre um espaço vetorial E com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$:

(I) Se S_1 e S_2 são subespaços de E tais que $S_1 \subset S_2$, então $S_1^\perp \subset S_2^\perp$.

(II) Se $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base do subespaço S de E, então

$$\mathrm{proj}_S\, v = \mathrm{proj}_{[u_1]}\, v + \mathrm{proj}_{[u_2]}\, v + \mathrm{proj}_{[u_3]}\, v,$$

qualquer que seja $v \in E$.

(III) Se $E = [u_1, \dots, u_n]$ e $v \in E$ é tal que $\langle v, u_j\rangle = 0$, para todo $j = 1, \dots, n$, então $v = 0_V$.

Está correto o que se afirma em

(a) (I) e (III), apenas.
(b) (I), (II) e (III).
(c) (II), apenas.
(d) (I) e (II), apenas.
(e) (III), apenas.

Q9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear que satisfaz $T(1,0,0) = (1,-3,1)$, $T(1,1,0) = (2,-5,a)$ e $T(1,1,1) = (-1,2,b)$. Então, T é injetor se, e somente se, $a+b$ for

(a) diferente de 2
(b) igual a 1
(c) igual a 2
(d) diferente de 0
(e) diferente de 1

Q10. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, seja S um subespaço não trivial de E e seja $T\colon E \to E$ o operador linear definido por $T(v) = -v + \operatorname{proj}_S v$, para todo $v \in E$. Então, pode-se afirmar corretamente que

(a) $\operatorname{Ker}(T) = S$
(b) $\operatorname{Ker}(T) = S^{\perp}$
(c) T é sobrejetor
(d) T é injetor
(e) $\operatorname{Im}(T) = S$

Q11. Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno usual, e seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ a base obtida de $\{u_1, u_2, u_3\}$ por meio do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Se $u_3 = (0, 2, -1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$, então $\operatorname{proj}_{[v_1, v_2]} u_3$ é igual a

(a) $(1, 1, -1)$
(b) $(-1, -1, 1)$
(c) $(1, -1, 1)$
(d) $(1, -1, -1)$
(e) $(-1, 3, -1)$

Q12. Considere, em $M_4(\mathbb{R})$, o produto interno definido por $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^{\mathrm{t}}A)$. Se $S = \big\{U \in M_4(\mathbb{R}) : U^{\mathrm{t}} = -U\big\}$, então $\dim S^{\perp}$ é igual a

(a) 6
(b) 8
(c) 10
(d) 9
(e) 5

Q13. Se, no espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, com o produto interno dado por $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^{\mathrm{t}}A)$, S é o subespaço definido por

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, a - b + 3c + d = 0 \text{ e } 2a - b + 2d = 0 \right\},$$

então $S^{\perp}$ é gerado por

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(e) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Q14. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Considere o subespaço $S = \left[t - 1, t^2 - 1\right]$ de $P_2(\mathbb{R})$ e o polinômio $f = t^2 + t + 1$. Se $g = at^2 + bt + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, é o elemento de S que satisfaz $d(f, g) < d(f, h)$, para todo $h \in S$, $h \neq g$, então $a - b - c$ é igual a

(a) -13
(b) 5
(c) 8
(d) -1
(e) -3

Q15. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e sejam $u, v \in V$. Então $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ se, e somente se,

(a) $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$
(b) $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|$
(c) $u \neq 0_V$ e $v \neq 0_V$
(d) $u \perp v$
(e) $u = 0_V$ ou $v = 0_V$

Q16. Considere os vetores $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ e $v_3 = (-2, 1, 1)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno usual. Se $u \in \mathbb{R}^3$ é tal que $\langle u, v_1\rangle = 2$, $\langle u, v_2\rangle = 0$ e $\langle u, v_3\rangle = -2$, então $\|u\|$ é igual a

(a) $2\sqrt{2}$
(b) $2\sqrt{3}$
(c) $\sqrt{5}$
(d) $\sqrt{2}$
(e) $\sqrt{3}$