

Nesta prova, se  $V$  é um espaço vetorial, o vetor nulo de  $V$  será denotado por  $0_V$ . Se  $u_1, \dots, u_n$  forem vetores de  $V$ , o subespaço de  $V$  gerado por  $\{u_1, \dots, u_n\}$  será denotado por  $[u_1, \dots, u_n]$ . Se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $S$  for um subespaço de  $V$ , a projeção ortogonal de um vetor  $u \in V$  sobre  $S$ , se existir, será denotada por  $\text{proj}_S u$ .

Em  $\mathbb{R}^n$ , o produto interno usual é dado por  $\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ .

Se  $A$  é uma matriz quadrada,  $A^t$  denota a matriz transposta de  $A$  e  $\text{tr}(A)$  denota o traço de  $A$ , isto é, a soma das entradas na diagonal principal de  $A$ .

**Q1.** Considere as seguintes afirmações sobre um espaço vetorial  $E$  com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :

(I) Se  $S_1$  e  $S_2$  são subespaços de  $E$  tais que  $S_1 \subset S_2$ , então  $S_1^\perp \subset S_2^\perp$ .

(II) Se  $\{u_1, u_2, u_3\}$  é uma base do subespaço  $S$  de  $E$ , então

$$\text{proj}_S v = \text{proj}_{[u_1]} v + \text{proj}_{[u_2]} v + \text{proj}_{[u_3]} v,$$

qualquer que seja  $v \in E$ .

(III) Se  $E = [u_1, \dots, u_n]$  e  $v \in E$  é tal que  $\langle v, u_j \rangle = 0$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ , então  $v = 0_V$ .

Está correto o que se afirma em

- (a) (I) e (II), apenas.
- (b) (I), (II) e (III).
- (c) (III), apenas.
- (d) (II), apenas.
- (e) (I) e (III), apenas.

**Q2.** A respeito das afirmações

- (I) Existe um operador linear  $T: P_4(\mathbb{R}) \rightarrow P_4(\mathbb{R})$  tal que  $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$ .
- (II) A função  $T: P_5(\mathbb{R}) \rightarrow P_5(\mathbb{R})$  definida por  $T(p(t)) = p(t+1)$ , para todo  $p(t) \in P_5(\mathbb{R})$ , é uma transformação linear.
- (III) Se  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais de dimensão finita e  $T: E \rightarrow F$  é uma transformação linear, então  $T$  é injetora se, e somente se,  $\dim E \leq \dim F$ .

é correto afirmar que

- (a) (I), (II) e (III) são verdadeiras.
- (b) (I), (II) e (III) são falsas.
- (c) apenas (II) e (III) são verdadeiras.
- (d) apenas (II) é verdadeira.
- (e) apenas (III) é verdadeira.

**Q3.** Se, no espaço vetorial  $M_2(\mathbb{R})$ , com o produto interno dado por  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ ,  $S$  é o subespaço definido por

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a - b + 3c + d = 0 \text{ e } 2a - b + 2d = 0 \right\},$$

então  $S^\perp$  é gerado por

- (a)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
- (b)  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
- (c)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- (d)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
- (e)  $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

**Q4.** Considere, em  $M_4(\mathbb{R})$ , o produto interno definido por  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ . Se  $S = \{U \in M_4(\mathbb{R}) : U^t = -U\}$ , então  $\dim S^\perp$  é igual a

- (a) 8
- (b) 9
- (c) 6
- (d) 5
- (e) 10

**Q5.** Se  $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  é o operador linear que satisfaz  $T(1+t) = 2-3t+t^2$ ,  $T(1+t^2) = 1+t+2t^2$  e  $T(t+t^2) = -1-2t+5t^2$ , e  $a, b, c \in \mathbb{R}$  são tais que  $T(3-2t+4t^2) = a+bt+ct^2$ , então  $a+b+c$  é igual a

- (a) 10
- (b) 25
- (c) 5
- (d) 17
- (e) 13

**Q6.** Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  e a transformação linear  $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  definida por  $T(X) = XA - AX$ , para todo  $X \in M_2(\mathbb{R})$ . Nessas condições,  $\dim \text{Im}(T)$  é igual a

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 0
- (d) 4
- (e) 3

**Q7.** Considere  $\mathbb{R}^2$  munido do produto interno usual e seja  $T$  um operador linear de  $\mathbb{R}^2$  que satisfaz  $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ , para todos  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e suponha que  $T(1, 0) = (a, b)$  e  $T(0, 1) = (b, a)$ . Nessa situação, considere as seguintes afirmações:

- (I)  $ab = 0$
- (II)  $a^2 + b^2 = 1$
- (III)  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$

Está correto o que se afirma em

- (a) (I) e (II), apenas.
- (b) (I) e (III), apenas.
- (c) (I), apenas.
- (d) (I), (II) e (III).
- (e) (II) e (III), apenas.

**Q8.** Considere, em  $P_2(\mathbb{R})$ , o produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Considere o subespaço  $S = [t - 1, t^2 - 1]$  de  $P_2(\mathbb{R})$  e o polinômio  $f = t^2 + t + 1$ . Se  $g = at^2 + bt + c$ , em que  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , é o elemento de  $S$  que satisfaz  $d(f, g) < d(f, h)$ , para todo  $h \in S$ ,  $h \neq g$ , então  $a - b - c$  é igual a

- (a) 5
- (b) -13
- (c) -3
- (d) 8
- (e) -1

**Q9.** Considere os vetores  $v_1 = (1, -1, 0)$ ,  $v_2 = (1, 2, 1)$  e  $v_3 = (-2, 1, 1)$  do espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ , munido do produto interno usual. Se  $u \in \mathbb{R}^3$  é tal que  $\langle u, v_1 \rangle = 2$ ,  $\langle u, v_2 \rangle = 0$  e  $\langle u, v_3 \rangle = -2$ , então  $\|u\|$  é igual a

- (a)  $\sqrt{3}$
- (b)  $\sqrt{2}$
- (c)  $\sqrt{5}$
- (d)  $2\sqrt{3}$
- (e)  $2\sqrt{2}$

**Q10.** Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sejam  $u, v \in V$ . Então  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$  se, e somente se,

- (a)  $u = 0_V$  ou  $v = 0_V$
- (b)  $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|$
- (c)  $u \perp v$
- (d)  $u \neq 0_V$  e  $v \neq 0_V$
- (e)  $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$

**Q11.** Seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, seja  $S$  um subespaço não trivial de  $E$  e seja  $T: E \rightarrow E$  o operador linear definido por  $T(v) = -v + \text{proj}_S v$ , para todo  $v \in E$ . Então, pode-se afirmar corretamente que

- (a)  $\text{Ker}(T) = S^\perp$
- (b)  $\text{Im}(T) = S$
- (c)  $\text{Ker}(T) = S$
- (d)  $T$  é injetor
- (e)  $T$  é sobrejetor

**Q12.** Considere o subespaço  $S = [(1, -1, 1, 2), (0, 1, -2, 0), (0, 0, 1, -3)]$  de  $\mathbb{R}^4$  e o vetor  $v = (3, -1, 4, 2)$ . Se  $\mathbb{R}^4$  está munido do produto interno usual, e  $v = v_1 + v_2$ , com  $v_1 \in S$  e  $v_2 = (a, b, c, d) \in S^\perp$ , então  $47(a + b + c + d)$  é igual a

- (a) 121
- (b) 130
- (c) 11
- (d) 83
- (e) 2

**Q13.** Seja  $\{u_1, u_2, u_3\}$  uma base de  $\mathbb{R}^3$ , munido do produto interno usual, e seja  $\{v_1, v_2, v_3\}$  a base obtida de  $\{u_1, u_2, u_3\}$  por meio do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Se  $u_3 = (0, 2, -1)$  e  $v_3 = (-1, 1, 0)$ , então  $\text{proj}_{[v_1, v_2]} u_3$  é igual a

- (a)  $(1, -1, 1)$
- (b)  $(-1, -1, 1)$
- (c)  $(-1, 3, -1)$
- (d)  $(1, 1, -1)$
- (e)  $(1, -1, -1)$

**Q14.** Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais de dimensão finita e seja  $T: U \rightarrow V$  uma transformação linear. Assinale a alternativa que contém uma implicação que é necessariamente verdadeira.

- (a) Se  $\dim V \leq \dim U - \dim \text{Ker}(T)$ , então  $T$  é sobrejetora.
- (b) Se  $T$  é injetora, então  $\dim U = \dim V$ .
- (c) Se  $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Ker}(T)$ , então  $T$  é sobrejetora.
- (d) Se  $\dim V - \dim \text{Im}(T) = \dim U$ , então  $T$  é injetora.
- (e) Se  $\{u_1, \dots, u_n\}$  é uma base de  $U$ , então  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  é uma base de  $\text{Im}(T)$ .

**Q15.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e seja  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear que satisfaz  $T(1, 0, 0) = (1, -3, 1)$ ,  $T(1, 1, 0) = (2, -5, a)$  e  $T(1, 1, 1) = (-1, 2, b)$ . Então,  $T$  é injetor se, e somente se,  $a + b$  for

- (a) diferente de 1
- (b) diferente de 2
- (c) diferente de 0
- (d) igual a 2
- (e) igual a 1

**Q16.** Em  $P(\mathbb{R})$ , com o produto interno definido por  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt$ , seja  $a + bt$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , o polinômio de grau menor ou igual a 1 mais próximo do polinômio  $t^7$ . Então,  $12(a + b)$  é igual a

- (a) 9
- (b) 4
- (c) 7
- (d) 6
- (e) 5