

Nesta prova, se V é um espaço vetorial, o vetor nulo de V será denotado por 0_V . Se u_1, \dots, u_n forem vetores de V , o subespaço de V gerado por $\{u_1, \dots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \dots, u_n]$. Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V , a projeção ortogonal de um vetor $u \in V$ sobre S , se existir, será denotada por $\text{proj}_S u$.

Em \mathbb{R}^n , o produto interno usual é dado por $\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

Se A é uma matriz quadrada, A^t denota a matriz transposta de A e $\text{tr}(A)$ denota o traço de A , isto é, a soma das entradas na diagonal principal de A .

Q1. Considere as seguintes afirmações sobre um espaço vetorial E com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

(I) Se S_1 e S_2 são subespaços de E tais que $S_1 \subset S_2$, então $S_1^\perp \subset S_2^\perp$.

(II) Se $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base do subespaço S de E , então

$$\text{proj}_S v = \text{proj}_{[u_1]} v + \text{proj}_{[u_2]} v + \text{proj}_{[u_3]} v,$$

qualquer que seja $v \in E$.

(III) Se $E = [u_1, \dots, u_n]$ e $v \in E$ é tal que $\langle v, u_j \rangle = 0$, para todo $j = 1, \dots, n$, então $v = 0_V$.

Está correto o que se afirma em

- (a) (I) e (II), apenas.
- (b) (I), (II) e (III).
- (c) (III), apenas.
- (d) (II), apenas.
- (e) (I) e (III), apenas.

Q2. A respeito das afirmações

- (I) Existe um operador linear $T: P_4(\mathbb{R}) \rightarrow P_4(\mathbb{R})$ tal que $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$.
- (II) A função $T: P_5(\mathbb{R}) \rightarrow P_5(\mathbb{R})$ definida por $T(p(t)) = p(t+1)$, para todo $p(t) \in P_5(\mathbb{R})$, é uma transformação linear.
- (III) Se E e F são espaços vetoriais de dimensão finita e $T: E \rightarrow F$ é uma transformação linear, então T é injetora se, e somente se, $\dim E \leq \dim F$.

é correto afirmar que

- (a) (I), (II) e (III) são verdadeiras.
- (b) (I), (II) e (III) são falsas.
- (c) apenas (II) e (III) são verdadeiras.
- (d) apenas (II) é verdadeira.
- (e) apenas (III) é verdadeira.

Q3. Se, no espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, com o produto interno dado por $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$, S é o subespaço definido por

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a - b + 3c + d = 0 \text{ e } 2a - b + 2d = 0 \right\},$$

então S^\perp é gerado por

- (a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
- (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
- (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- (d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
- (e) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Q4. Considere, em $M_4(\mathbb{R})$, o produto interno definido por $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$. Se $S = \{U \in M_4(\mathbb{R}) : U^t = -U\}$, então $\dim S^\perp$ é igual a

- (a) 8
- (b) 9
- (c) 6
- (d) 5
- (e) 10

Q5. Se $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ é o operador linear que satisfaz $T(1+t) = 2-3t+t^2$, $T(1+t^2) = 1+t+2t^2$ e $T(t+t^2) = -1-2t+5t^2$, e $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $T(3-2t+4t^2) = a+bt+ct^2$, então $a+b+c$ é igual a

- (a) 10
- (b) 25
- (c) 5
- (d) 17
- (e) 13

Q6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e a transformação linear $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = XA - AX$, para todo $X \in M_2(\mathbb{R})$. Nessas condições, $\dim \text{Im}(T)$ é igual a

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 0
- (d) 4
- (e) 3

Q7. Considere \mathbb{R}^2 munido do produto interno usual e seja T um operador linear de \mathbb{R}^2 que satisfaz $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e suponha que $T(1, 0) = (a, b)$ e $T(0, 1) = (b, a)$. Nessa situação, considere as seguintes afirmações:

- (I) $ab = 0$
- (II) $a^2 + b^2 = 1$
- (III) $a \geq 0$ e $b \geq 0$

Está correto o que se afirma em

- (a) (I) e (II), apenas.
- (b) (I) e (III), apenas.
- (c) (I), apenas.
- (d) (I), (II) e (III).
- (e) (II) e (III), apenas.

Q8. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Considere o subespaço $S = [t - 1, t^2 - 1]$ de $P_2(\mathbb{R})$ e o polinômio $f = t^2 + t + 1$. Se $g = at^2 + bt + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, é o elemento de S que satisfaz $d(f, g) < d(f, h)$, para todo $h \in S$, $h \neq g$, então $a - b - c$ é igual a

- (a) 5
- (b) -13
- (c) -3
- (d) 8
- (e) -1

Q9. Considere os vetores $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ e $v_3 = (-2, 1, 1)$ do espaço vetorial \mathbb{R}^3 , munido do produto interno usual. Se $u \in \mathbb{R}^3$ é tal que $\langle u, v_1 \rangle = 2$, $\langle u, v_2 \rangle = 0$ e $\langle u, v_3 \rangle = -2$, então $\|u\|$ é igual a

- (a) $\sqrt{3}$
- (b) $\sqrt{2}$
- (c) $\sqrt{5}$
- (d) $2\sqrt{3}$
- (e) $2\sqrt{2}$

Q10. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam $u, v \in V$. Então $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ se, e somente se,

- (a) $u = 0_V$ ou $v = 0_V$
- (b) $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|$
- (c) $u \perp v$
- (d) $u \neq 0_V$ e $v \neq 0_V$
- (e) $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$

Q11. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, seja S um subespaço não trivial de E e seja $T: E \rightarrow E$ o operador linear definido por $T(v) = -v + \text{proj}_S v$, para todo $v \in E$. Então, pode-se afirmar corretamente que

- (a) $\text{Ker}(T) = S^\perp$
- (b) $\text{Im}(T) = S$
- (c) $\text{Ker}(T) = S$
- (d) T é injetor
- (e) T é sobrejetor

Q12. Considere o subespaço $S = [(1, -1, 1, 2), (0, 1, -2, 0), (0, 0, 1, -3)]$ de \mathbb{R}^4 e o vetor $v = (3, -1, 4, 2)$. Se \mathbb{R}^4 está munido do produto interno usual, e $v = v_1 + v_2$, com $v_1 \in S$ e $v_2 = (a, b, c, d) \in S^\perp$, então $47(a + b + c + d)$ é igual a

- (a) 121
- (b) 130
- (c) 11
- (d) 83
- (e) 2

Q13. Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de \mathbb{R}^3 , munido do produto interno usual, e seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ a base obtida de $\{u_1, u_2, u_3\}$ por meio do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Se $u_3 = (0, 2, -1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$, então $\text{proj}_{[v_1, v_2]} u_3$ é igual a

- (a) $(1, -1, 1)$
- (b) $(-1, -1, 1)$
- (c) $(-1, 3, -1)$
- (d) $(1, 1, -1)$
- (e) $(1, -1, -1)$

Q14. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear. Assinale a alternativa que contém uma implicação que é necessariamente verdadeira.

- (a) Se $\dim V \leq \dim U - \dim \text{Ker}(T)$, então T é sobrejetora.
- (b) Se T é injetora, então $\dim U = \dim V$.
- (c) Se $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Ker}(T)$, então T é sobrejetora.
- (d) Se $\dim V - \dim \text{Im}(T) = \dim U$, então T é injetora.
- (e) Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de U , então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$.

Q15. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear que satisfaz $T(1, 0, 0) = (1, -3, 1)$, $T(1, 1, 0) = (2, -5, a)$ e $T(1, 1, 1) = (-1, 2, b)$. Então, T é injetor se, e somente se, $a + b$ for

- (a) diferente de 1
- (b) diferente de 2
- (c) diferente de 0
- (d) igual a 2
- (e) igual a 1

Q16. Em $P(\mathbb{R})$, com o produto interno definido por $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt$, seja $a + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$, o polinômio de grau menor ou igual a 1 mais próximo do polinômio t^7 . Então, $12(a + b)$ é igual a

- (a) 9
- (b) 4
- (c) 7
- (d) 6
- (e) 5