PROVA TIPO 06

Nesta prova, se V é um espaço vetorial, o vetor nulo de V será denotado por 0_V. Se $u_1, \dots, u_n$ forem vetores de V, o subespaço de V gerado por $\{u_1, \dots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \dots, u_n]$. Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V, a projeção ortogonal de um vetor $u \in V$ sobre S, se existir, será denotada por $\mathrm{proj}_S\, u$.

Em $\mathbb{R}^n$, o produto interno usual é dado por $\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.

Se A é uma matriz quadrada, A^t denota a matriz transposta de A e $\mathrm{tr}(A)$ denota o traço de A, isto é, a soma das entradas na diagonal principal de A.

Q1. A respeito das afirmações

(I) Existe um operador linear $T\colon P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

(II) A função $T\colon P_5(\mathbb{R}) \to P_5(\mathbb{R})$ definida por $T(p(t)) = p(t+1)$, para todo $p(t) \in P_5(\mathbb{R})$, é uma transformação linear.

(III) Se E e F são espaços vetoriais de dimensão finita e $T\colon E \to F$ é uma transformação linear, então T é injetora se, e somente se, $\dim E \leq \dim F$.

é correto afirmar que

(a) apenas (II) e (III) são verdadeiras.
(b) (I), (II) e (III) são falsas.
(c) apenas (III) é verdadeira.
(d) (I), (II) e (III) são verdadeiras.
(e) apenas (II) é verdadeira.

Q2. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e sejam $u, v \in V$. Então $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ se, e somente se,

(a) $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|$
(b) $u \perp v$
(c) $u \neq 0_V$ e $v \neq 0_V$
(d) $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$
(e) $u = 0_V$ ou $v = 0_V$

1) Se $\exists\, T$, $5 = \dim P_4(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = 2 \dim \mathrm{Ker}(T)$.
Logo, $\dim \mathrm{Ker}(T) = 5/2$ (absurdo) $\therefore \nexists\, T$ e $\therefore$ (I) é falsa.

- $T(p(t) + q(t)) = T((p+q)(t)) = (p+q)(t+1) = p(t+1) + q(t+1) = T(p(t)) + T(q(t))$, $\forall\, p(t), q(t) \in P_5(\mathbb{R})$.
- $T(\lambda \cdot p(t)) = T((\lambda p)(t)) = (\lambda p)(t+1) = \lambda \cdot p(t+1) = \lambda \cdot T(p(t))$, $(\forall\, \lambda \in \mathbb{R})$ $(\forall\, p(t) \in P_5(\mathbb{R}))$. $\therefore$ (II) é verd.

$\dim \mathbb{R}^2 \leq \dim \mathbb{R}^3$ e $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T = 0$ é linear.
No entanto T não é injetora $\therefore$ (III) é falsa

2) $\|u+v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 = \|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \|u\|\cdot\|v\| = \langle u, v \rangle$.

Q3. Se $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ é o operador linear que satisfaz $T(1+t) = 2-3t+t^2$, $T(1+t^2) = 1+t+2t^2$ e $T(t+t^2) = -1-2t+5t^2$, e $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $T(3-2t+4t^2) = a+bt+ct^2$, então $a+b+c$ é igual a

(a) 13
(b) 10
(c) 17
(d) 25
(e) 5

Q4. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Assinale a alternativa que contém uma implicação que é necessariamente verdadeira.

(a) Se T é injetora, então $\dim U = \dim V$.
(b) Se $\dim V - \dim \mathrm{Im}(T) = \dim U$, então T é injetora.
(c) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.
(d) Se $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T)$, então T é sobrejetora.
(e) Se $\dim V \leq \dim U - \dim \mathrm{Ker}(T)$, então T é sobrejetora.

Q5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e a transformação linear $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = XA - AX$, para todo $X \in M_2(\mathbb{R})$. Nessas condições, $\dim \mathrm{Im}(T)$ é igual a

(a) 2
(b) 1
(c) 0
(d) 3
(e) 4

---

(3) $2 \cdot T(1+t+t^2) = T(2+2t+2t^2) = T(1+t) + T(1+t^2) + T(t+t^2) =$

$= (2-3t+t^2) + (1+t+2t^2) + (-1-2t+5t^2) = 2-4t+8t^2$

$\therefore\ T(1+t+t^2) = 1-2t+4t^2$

Logo, $T(1) = T(1+t+t^2) - T(t+t^2) = 2-t^2$

$T(t) = T(1+t+t^2) - T(1+t^2) = -3t+2t^2$

$T(t^2) = T(1+t+t^2) - T(1+t) = -1+t+3t^2$

Finalmente, $T(3-2t+4t^2) = 3 \cdot T(1) - 2\,T(t) + 4\,T(t^2) =$

$= 3(2-t^2) - 2(-3t+2t^2) + 4(-1+t+3t^2) = 2+10t+5t^2$

$\therefore\ a+b+c = 2+10+5 = \boxed{17}$

---

(4) $\dim V \leq \dim U - \dim \mathrm{Ker}(T) = \dim \mathrm{Im}(T)$

Dado que, sempre, $\dim \mathrm{Im}(T) \leq \dim V$ (pois $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de V), segue $\dim V = \dim \mathrm{Im}(T)$.

Logo, $\mathrm{Im}(T) = V$, e $\therefore$ T é sobrejetora

---

(5) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow 0 = T(X) = XA - AX \Leftrightarrow AX = X \cdot A.$

Ora, $AX = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix}$ e $X \cdot A = \begin{pmatrix} a+2b & -a+3b \\ c+2d & -c+3d \end{pmatrix}$

Logo, $AX = X A \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b = a-c \\ -a+3b = b-d \\ c+2d = 2a+3c \\ -c+3d = 2b+3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+d \\ c = -2b \end{cases}$; $b, d \in \mathbb{R}$.

Daí, $X \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow (\exists\, b, d \in \mathbb{R})\ X = \begin{pmatrix} 2b+d & b \\ -2b & c \end{pmatrix} =$

$= b \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Logo, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é

base de $\mathrm{Ker}(T)$. $\therefore\ \dim \mathrm{Ker}(T) = 2$.

$\therefore\ \dim \mathrm{Im}(T) = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Ker}(T) = 4-2 = \boxed{2}$

Q6. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o produto interno definido por
$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$
Considere o subespaço $S = [t-1, t^2-1]$ de $P_2(\mathbb{R})$ e o polinômio $f = t^2 + t + 1$. Se $g = at^2 + bt + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, é o elemento de S que satisfaz $d(f, g) < d(f, h)$, para todo $h \in S$, $h \neq g$, então $a - b - c$ é igual a

(a) 5
(b) −3
(c) −13
(d) −1
(e) 8

Q7. Se, no espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, com o produto interno dado por $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$, S é o subespaço definido por
$$S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, a - b + 3c + d = 0 \text{ e } 2a - b + 2d = 0\right\},$$
então $S^\perp$ é gerado por

(a) $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0\end{bmatrix}\right\}$
(b) $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0\end{bmatrix}\right\}$
(c) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0\end{bmatrix}\right\}$
(d) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1\end{bmatrix}\right\}$
(e) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 0\end{bmatrix}\right\}$

6) $S = [u_1, u_2]$; $u_1(t) = t-1$; $u_2(t) = t^2-1$; $f(t) = t^2+t+1$.

Sabemos que $g = pr_S f$ $\therefore$ $g = \alpha\cdot u_1 + \beta \cdot u_2$, onde (α, β) é a solução de

$$\begin{cases} \langle u_1, u_1\rangle\cdot\alpha + \langle u_1, u_2\rangle\cdot\beta = \langle u_1, f\rangle. \\ \langle u_2, u_1\rangle\alpha + \langle u_2, u_2\rangle\cdot\beta = \langle u_2, f\rangle \end{cases}$$

Ora, $\langle u_1, u_1\rangle = (-1)(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 2.$; $\langle u_1, u_2\rangle = (-1)(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 3 = 4$;
$\langle u_2, u_2\rangle = (-1)(-1) + 0\cdot 0 + 3\cdot 3 = 10$; $\langle u_1, f\rangle = (-1)(1) + 0\cdot 3 + 1\cdot 7 = 6$;
$\langle u_2, f\rangle = (-1)\cdot(1) + 0\cdot 3 + 3\cdot 7 = 20.$

Logo, $\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 6 \\ 4\alpha + 10\beta = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ 2\alpha + 5\beta = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 4. \end{cases}$

Daí, $g(t) = (-5)(t-1) + 4(t^2-1) = \boxed{4t^2 - 5t + 1}$

$\therefore$ $a - b - c = 4 + 5 - 1 = \boxed{8}$

7) $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 3c + d = 0 \\ 2a - b + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 3c + d = 0 \\ b - 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3c - d \\ b = 6c \end{cases}$; $c, d \in \mathbb{R}$ $\therefore$ $u \in S \Leftrightarrow (\exists c, d \in \mathbb{R})$ $u = \begin{pmatrix} 3c-d & 6c \\ c & d\end{pmatrix} =$

$= c\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. $\therefore$ $S = [\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{u_1} ; \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{u_2}]$.

Logo, $v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in S^\perp \Leftrightarrow v \perp u_1$ e $v \perp u_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 6\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -3\alpha - 6\beta \\ \delta = \alpha \end{cases}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $v \in S^\perp \Leftrightarrow (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ $v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -3\alpha - 6\beta & \alpha\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore$ $S^\perp = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0\end{pmatrix}]$

Q8. Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno usual, e seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ a base obtida de $\{u_1, u_2, u_3\}$ por meio do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Se $u_3 = (0, 2, -1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$, então $\text{proj}_{[v_1,v_2]} u_3$ é igual a

(a) $(-1, -1, 1)$
(b) $(1, -1, 1)$
(c) $(-1, 3, -1)$
(d) $(1, 1, -1)$
(e) $(1, -1, -1)$

Q9. Considere o subespaço $S = [\overbrace{(1, -1, 1, 2)}^{u_1}, \overbrace{(0, 1, -2, 0)}^{u_2}, \overbrace{(0, 0, 1, -3)}^{u_3}]$ de $\mathbb{R}^4$ e o vetor $v = (3, -1, 4, 2)$. Se $\mathbb{R}^4$ está munido do produto interno usual, e $v = v_1 + v_2$, com $v_1 \in S$ e $v_2 = (a, b, c, d) \in S^\perp$, então $47(a + b + c + d)$ é igual a

(a) 121
(b) 11
(c) 83
(d) 2
(e) 130

(8) Sabemos que $v_3 = u_3 - \text{pr}_{[v_1,v_2]} u_3$

Logo, $\text{pr}_{[v_1,v_2]} u_3 = u_3 - v_3 = (0,2,-1) - (-1,1,0) = \boxed{(1,1,-1)}$

---

(9) Basta observar que $v_2 = \text{pr}_{S^\perp} v$.

Agora, $w = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in S^\perp \Leftrightarrow w \perp u_1,\ w \perp u_2,\ w \perp u_3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma + 2\delta = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma - 3\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \delta \\ \beta = 6\delta \\ \gamma = 3\delta \end{cases} ;\ \delta \in \mathbb{R}$$

$\therefore\ w \in S^\perp \Leftrightarrow (\exists \delta \in \mathbb{R})\ w = \delta(1, 6, 3, 1)$. $\therefore\ S^\perp = [\underbrace{(1,6,3,1)}_{w_0}]$

Segue pois que $v_2 = \text{pr}_{S^\perp} v = \text{pr}_{(1,6,3,1)} v = \left(\frac{\langle v, w_0\rangle}{\|w_0\|^2}\right) w_0 = \frac{11}{47}(1,6,3,1)$.

$\therefore\ a+b+c+d = \frac{11}{47}(1+6+3+1) = \frac{11 \cdot 11}{47} = \boxed{\frac{121}{47}}$

Q10. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual e seja T um operador linear de $\mathbb{R}^2$ que satisfaz $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e suponha que $T(1,0) = (a,b)$ e $T(0,1) = (b,a)$. Nessa situação, considere as seguintes afirmações:

(I) $ab = 0$
(II) $a^2 + b^2 = 1$
(III) $a \geq 0$ e $b \geq 0$

Está correto o que se afirma em

(a) (I), apenas.
(b) (I) e (III), apenas.
(c) (I) e (II), apenas.
(d) (I), (II) e (III).
(e) (II) e (III), apenas.

Q11. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, seja S um subespaço não trivial de E e seja $T\colon E \to E$ o operador linear definido por $T(v) = -v + \operatorname{proj}_S v$, para todo $v \in E$. Então, pode-se afirmar corretamente que

(a) T é sobrejetor
(b) $\operatorname{Im}(T) = S$
(c) $\operatorname{Ker}(T) = S^\perp$
(d) T é injetor
(e) $\operatorname{Ker}(T) = S$

Q12. Considere, em $M_4(\mathbb{R})$, o produto interno definido por $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$. Se $S = \{U \in M_4(\mathbb{R}) : U^t = -U\}$, então $\dim S^\perp$ é igual a

(a) 6
(b) 10
(c) 8
(d) 9
(e) 5

(10) • $0 = \langle (1,0);(0,1)\rangle = \langle T(1,0);T(0,1)\rangle = \langle (a,b);(b,a)\rangle = 2ab$.
$\Leftrightarrow ab = 0$ ∴ (I) é verd.;

$1 = \langle (1,0),(1,0)\rangle = \langle T(1,0);T(1,0)\rangle = \langle (a,b),(a,b)\rangle = a^2+b^2$
Logo, (II) é verd.

Seja $T: v \in \mathbb{R}^2 \mapsto T(v) = -v \in \mathbb{R}^2$. Então T é linear e
$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle -u, -v\rangle = \langle u, v\rangle$, $(\forall u, v \in \mathbb{R}^2)$
Ora, neste caso, $T(1,0) = (-1,0)$ ∴ $a < 0$.
Logo, nas condições do enunciado, nem sempre $a \geq 0$, qdo $(a,b) = T(1,0)$. ∴ (III) é falsa.

(11) $v \in Ker(T) \Leftrightarrow 0 = T(v) = -v + pr_S v \Leftrightarrow v = pr_S v \in S$
∴ $Ker(T) = S$

(12) $U = (a_{ij}) \in S \Leftrightarrow U^t = -U \Leftrightarrow (\forall i,j = 1,..,4)\ a_{ji} = -a_{ij}$.
Logo, $U \in S \Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$. Logo $\dim S = 6$.
(em U, há 6 variáveis livres!).

∴ $\dim S^\perp = \dim M_4(\mathbb{R}) - \dim S = 16 - 6 = \boxed{10}$

Q13. Em $P(\mathbb{R})$, com o produto interno definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$, seja $a+bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$, o polinomio de grau menor ou igual a 1 mais proximo do polinômio t^7. Então, $12(a+b)$ é igual a

(a) 7
(b) 9
(c) 6
(d) 5
(e) 4

Q14. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear que satisfaz $T(1,0,0) = (1,-3,1)$, $T(1,1,0) = (2,-5,a)$ e $T(1,1,1) = (-1,2,b)$. Então, T é injetor se, e somente se, $a+b$ for

(a) diferente de 2
(b) igual a 2
(c) igual a 1
(d) diferente de 0
(e) diferente de 1

(13) Note-se que o polinômio procurado é $pr_{P_1(\mathbb{R})} v$, onde $v(t)=t^7$ e $B=\{u_1,u_2\}$ é base de $P_1(\mathbb{R})$, onde $u_1(t)=1$; $u_2(t)=t$.

Logo, $pr_{P_1(\mathbb{R})} v = a u_1 + b\cdot u_2$; onde (a,b) é a solução de

$$\begin{cases} \langle u_1,u_1\rangle\cdot a + \langle u_1,u_2\rangle\cdot b = \langle u_1, v\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle\cdot a + \langle u_2,u_2\rangle b = \langle u_2, v\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{2}b = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{6} \\ b = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \therefore\ a+b = \frac{-1}{6}+\frac{7}{12} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

(14) T é injetor $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(T)=\{0\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(T) = 3 - \dim \operatorname{Ker}(T) = 3-0=3$

Mas, $\operatorname{Im}(T) = [T(1,0,0), T(1,1,0); T(1,1,1)] =$
$= [\underbrace{(1,-3,1)}_{v_1}, \underbrace{(2,-5,a)}_{v_2}; \underbrace{(-1,2,b)}_{v_3}]$.

Logo, $\operatorname{Im}(T)$ terá dimensão 3 $\Leftrightarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ for L.I.

Dado que $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & a \\ -1 & 2 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & -1 & b+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a+b-1 \end{pmatrix}$,

segue que $\{v_1,v_2,v_3\}$ é L.I. (método prático para identificar um conj. L.I.) $\Leftrightarrow a+b-1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{a+b\neq 1}$

Q15. Considere as seguintes afirmações sobre um espaço vetorial E com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$:

(I) Se S_1 e S_2 são subespaços de E tais que $S_1 \subset S_2$, então $S_1^\perp \subset S_2^\perp$.

(II) Se $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base do subespaço S de E, então

$$\operatorname{proj}_S v = \operatorname{proj}_{[u_1]} v + \operatorname{proj}_{[u_2]} v + \operatorname{proj}_{[u_3]} v,$$

qualquer que seja $v \in E$.

(III) Se $E = [u_1, \ldots, u_n]$ e $v \in E$ é tal que $\langle v, u_j\rangle = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$, então $v = 0_V$.

Está correto o que se afirma em

(a) (I) e (III), apenas.
(b) (III), apenas.
(c) (I), (II) e (III).
(d) (II), apenas.
(e) (I) e (II), apenas.

Q16. Considere os vetores $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ e $v_3 = (-2, 1, 1)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno usual. Se $u \in \mathbb{R}^3$ é tal que $\langle u, v_1\rangle = 2$, $\langle u, v_2\rangle = 0$ e $\langle u, v_3\rangle = -2$, então $\|u\|$ é igual a

(a) $\sqrt{3}$
(b) $2\sqrt{2}$
(c) $\sqrt{5}$
(d) $2\sqrt{3}$
(e) $\sqrt{2}$

---

(15) Seja $E \neq \{0\}$ e tome $S_1 = \{0\}$ e $S_2 = E$.

Então, $S_1 \subset S_2$ mas $S_1^\perp = E \not\subset S_2^\perp = \{0\}$

∴ (I) é falsa.

(II) é falsa, pois sabe-se que a expressão é válida quando a base é ortogonal. Do contrário, ela pode não valer.

Ex. Considere $v = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ ($\langle , \rangle$ = usual).

$S = \{(a,b,c,0) \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

$B_1 = \{\overbrace{(1,0,0,0)}^{e_1}; \overbrace{(0,1,0,0)}^{e_2}; \overbrace{(0,0,1,0)}^{e_3}\}$ é base ortogonal de S.

$B_2 = \{\underbrace{(1,1,1,0)}_{u_1}; \underbrace{(0,1,1,0)}_{u_2}; \underbrace{(0,0,1,0)}_{u_3}\}$ é base (NÃO-ortog.) de S.

$\therefore\ pr_S v = pr_{e_1} v + pr_{e_2} v + pr_{e_3} v = (1,1,1,0)$.

Mas $pr_{u_1} v + pr_{u_2} v + pr_{u_3} v = u_1 + u_2 + u_3 = (1,2,3,0) \neq$

$\neq pr_S v$

$v \in E = [u_1, \ldots, u_n] \Rightarrow (\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R})\ v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$.

Logo, $\langle v, v\rangle = \langle v, \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n\rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle v, u_1\rangle}_{=0} + \ldots + \alpha_n \underbrace{\langle v, u_n\rangle}_{=0} = 0$.

Logo, $v = 0$. ∴ (III) é verd.

(16) Seja $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$\begin{cases} 2 = \langle u, v_1\rangle = a - b \\ 0 = \langle u, v_2\rangle = a + 2b + c \\ -2 = \langle u, v_3\rangle = -2a + b + c \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{matrix}}$$

$\therefore\ u = (1,-1,1)\ \therefore\ \|u\| = \boxed{\sqrt{3}}$