Nesta prova, se n é um inteiro positivo, I_n denota a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

Q1. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ de polinômio característico $p(t) = -t^3 + 4t^2 - 5t + 2$.

I. A é invertível.
II. A é necessariamente diagonalizável.
III. -2 é um autovalor de A.

Está correto o que se afirma em

(A) I e III, apenas.
(B) II, apenas.
(C) I, apenas.
(D) II e III, apenas.
(E) I, II e III.

Q2. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sobre a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, está correto afirmar que ela

(A) é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = -\beta$.
(B) não é diagonalizável, quaisquer que sejam α e β.
(C) é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = \beta = 0$.
(D) é diagonalizável, quaisquer que sejam α e β.
(E) é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = \beta$.

Q3. Seja n um inteiro positivo, e considere as seguintes afirmações sobre o operador linear $T\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ definido por $T\big(p(x)\big) = xp'(x)$, para todo $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$, em que $p'(x)$ denota a derivada de $p(x)$.

I. O operador T é diagonalizável.
II. A soma dos autovalores de T é $n(n+1)/2$.
III. O operador T é inversível.

Está correto o que se afirma em

(A) II e III, apenas.
(B) I e III, apenas.
(C) I e II, apenas.
(D) I, II e III.
(E) II, apenas.

Q4. Sabendo que 7 é um autovalor de multiplicidade algébrica 3 da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, pode-se afirmar corretamente que também é autovalor de A o número

(A) 6
(B) 0
(C) -1
(D) 3
(E) -2

Q5. Sejam F e G os operadores lineares de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$[F]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C} = \{(1,0),(1,1)\}$.
Se $(G \circ F)(1,1) = (a,b)$, então $a+b$ é igual a

(A) 1
(B) 3
(C) 2
(D) 0
(E) 4

Q6. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Sobre a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, é correto afirmar que

(A) se $b = 0$, então A não é diagonalizável.
(B) A é sempre diagonalizável.
(C) se $a = 2$, então A não é diagonalizável, qualquer que seja b.
(D) se A é diagonalizável e $b \neq 0$, então $a \neq 1$ e $a \neq 2$.
(E) se $a = 1$, então A é diagonalizável quando $b = 1$.

Q7. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e seja $T\colon V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = (a-t)^2(b-t)^{n-2}$, em que a e b são números reais distintos. Sejam $v, w \in V$ vetores não nulos tais que $T(v) = av$ e $T(w) = bw$. Denote o operador identidade de V por I. Qual das seguintes afirmações é **FALSA**?

(A) Se T é diagonalizável, então existe $u \in V$ tal que $T(u) = au$ e $\{u, v\}$ é linearmente independente.
(B) Se $\mathrm{Ker}(T - aI) = [v]$, então T não é diagonalizável.
(C) Os únicos autovalores de T são a e b.
(D) O conjunto $\{v, w\}$ é linearmente independente.
(E) O vetor $v + w$ é um autovetor de T.

Q8. Considere a transformação linear $T\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, dada por

$$T\big(p(x)\big) = p(x+1) - p(x),$$

para todo $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$, e seja A a matriz de T em relação às bases

$$\mathcal{B} = \big\{3,\ 2+x,\ x^2,\ x^3\big\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \big\{1,\ x,\ 3-x+x^2\big\}$$

de $P_3(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Então, a soma dos elementos da segunda linha de A é igual a

(A) 8
(B) -3
(C) 0
(D) -4
(E) 5

Q9. Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ é tal que $(1,1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 1 e $(1,2)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 3, então a soma dos elementos da primeira coluna de A^{99} é igual a

(A) $-2-3^{100}$
(B) $1+3^{99}$
(C) $3+3^{100}$
(D) $-2+3^{99}$
(E) $4-3^{100}$

Q10. Seja $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = -t^3(t+1)(t-3)$. Denote o operador identidade de $\mathbb{R}^5$ por I. Qual das seguintes afirmações é **FALSA**?

(A) Se T é diagonalizável, então $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)+\dim\big(\mathrm{Im}(T+I)\big)+\dim\big(\mathrm{Im}(T-3I)\big) = 5$.
(B) Vale $\dim\big(\mathrm{Ker}(T+I)\big) = 1$.
(C) Se $v \in \mathbb{R}^5$ é tal que $T(v) = 2v$, então v é o vetor nulo.
(D) Se $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$, então T não é diagonalizável.
(E) Vale $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T+I)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T-3I)\big) \leq 5$.

Q11. Seja n um inteiro maior do que 1 e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Suponha que A seja diagonalizável e que todos os seus autovalores tenham valor absoluto menor do que 1. Considere as seguintes afirmações:

I. $-1 < \det(A) < 1$.

II. Todos os autovalores de A têm multiplicidade geométrica necessariamente igual a 1.

III. A matriz $A - I_n$ é invertível.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) I.

(B) III.

(C) I e III.

(D) II.

(E) II e III.

Q12. Considere as seguintes afirmações sobre operadores lineares S e T definidos em um mesmo espaço vetorial com produto interno.

I. Se S e T são simétricos e $S \circ T = T \circ S$, então o operador $S \circ T$ é simétrico.

II. Se T é simétrico e inversível, então T^{-1} é simétrico.

III. Se S e T são simétricos e $S \circ T = T \circ S$, então S e T possuem os mesmos autovalores.

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.

(B) I e III, apenas.

(C) I e II, apenas.

(D) II e III, apenas.

(E) II, apenas.

Q13. Seja V o espaço vetorial das funções $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas, munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Seja T operador linear de V definido por $\big(T(f)\big)(x) = f(1-x)$, com $x \in [0,1]$, para todo $f \in V$. Considere as seguintes afirmações:

I. T é simétrico.

II. 1 é um autovalor de T.

III. T é injetor.

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.

(B) I e II, apenas.

(C) III, apenas.

(D) II, apenas.

(E) II e III, apenas.

Q14. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que:

- $\mathrm{Ker}(T) = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1 + x_2 - x_3 = x_3 + x_4 = 0\big\}$;
- o polinômio característico de T é $p(t) = t^4 - t^2$;
- $(0, 1, 0, 0) \in \mathrm{Ker}(T + I)$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^4$;
- $(1, 1, 1, 0)$ é autovetor de T.

Então, $T(0, 1, 2, 3)$ é igual a

(A) $(5, 11, 5, 0)$

(B) $(-1, -8, -1, 0)$

(C) $(2, 3, -6, 5)$

(D) $(0, 0, -6, 5)$

(E) $(0, 0, -2, 3)$

Q15. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, e considere o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = \big(3x + (2a+6)y\,,\ -ax + 3y + bz\,,\ 2by + 4z\big),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Se T é simétrico, então o produto dos autovalores de T é igual a

(A) 0
(B) 20
(C) 10
(D) -30
(E) 8

Q16. Seja n um inteiro maior do que 1 e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se $(1, 1, \ldots, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ, então

(A) a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $A - \lambda I_n$ é zero.
(B) a soma das linhas da matriz A é o vetor nulo.
(C) a soma das colunas da matriz A é o vetor nulo.
(D) a soma das linhas da matriz $A - \lambda I_n$ é o vetor nulo.
(E) a soma das colunas da matriz $A - \lambda I_n$ é o vetor nulo.