

Nesta prova, se n é um inteiro positivo, I_n denota a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

Q1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = (a - t)^2(b - t)^{n-2}$, em que a e b são números reais distintos. Sejam $v, w \in V$ vetores não nulos tais que $T(v) = av$ e $T(w) = bw$. Denote o operador identidade de V por I . Qual das seguintes afirmações é **FALSA**?

- (A) Se $\text{Ker}(T - aI) = [v]$, então T não é diagonalizável.
- (B) O vetor $v + w$ é um autovetor de T .
- (C) Se T é diagonalizável, então existe $u \in V$ tal que $T(u) = au$ e $\{u, v\}$ é linearmente independente.
- (D) Os únicos autovalores de T são a e b .
- (E) O conjunto $\{v, w\}$ é linearmente independente.

Q2. Seja n um inteiro maior do que 1 e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se $(1, 1, \dots, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ , então

- (A) a soma das linhas da matriz $A - \lambda I_n$ é o vetor nulo.
- (B) a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $A - \lambda I_n$ é zero.
- (C) a soma das colunas da matriz $A - \lambda I_n$ é o vetor nulo.
- (D) a soma das linhas da matriz A é o vetor nulo.
- (E) a soma das colunas da matriz A é o vetor nulo.

Q3. Seja V o espaço vetorial das funções $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Seja T operador linear de V definido por $(T(f))(x) = f(1-x)$, com $x \in [0, 1]$, para todo $f \in V$. Considere as seguintes afirmações:

- I. T é simétrico.
- II. 1 é um autovalor de T .
- III. T é injetor.

Está correto o que se afirma em

- (A) I e II, apenas.
- (B) III, apenas.
- (C) II e III, apenas.
- (D) II, apenas.
- (E) I, II e III.

Q4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Sobre a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, é correto afirmar que

- (A) se $b = 0$, então A não é diagonalizável.
- (B) se $a = 2$, então A não é diagonalizável, qualquer que seja b .
- (C) se A é diagonalizável e $b \neq 0$, então $a \neq 1$ e $a \neq 2$.
- (D) A é sempre diagonalizável.
- (E) se $a = 1$, então A é diagonalizável quando $b = 1$.

Q5. Seja $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = -t^3(t+1)(t-3)$. Denote o operador identidade de \mathbb{R}^5 por I . Qual das seguintes afirmações é **FALSA**?

- (A) Se $\dim(\text{Im}(T)) = 3$, então T não é diagonalizável.
- (B) Vale $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Ker}(T+I)) + \dim(\text{Ker}(T-3I)) \leq 5$.
- (C) Se T é diagonalizável, então $\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Im}(T+I)) + \dim(\text{Im}(T-3I)) = 5$.
- (D) Vale $\dim(\text{Ker}(T+I)) = 1$.
- (E) Se $v \in \mathbb{R}^5$ é tal que $T(v) = 2v$, então v é o vetor nulo.

Q6. Seja n um inteiro positivo, e considere as seguintes afirmações sobre o operador linear $T: P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ definido por $T(p(x)) = xp'(x)$, para todo $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$, em que $p'(x)$ denota a derivada de $p(x)$.

- I. O operador T é diagonalizável.
- II. A soma dos autovalores de T é $n(n+1)/2$.
- III. O operador T é inversível.

Está correto o que se afirma em

- (A) I, II e III.
- (B) I e III, apenas.
- (C) II e III, apenas.
- (D) I e II, apenas.
- (E) II, apenas.

Q7. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sobre a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, está correto afirmar que ela

- (A) não é diagonalizável, quaisquer que sejam α e β .
- (B) é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = -\beta$.
- (C) é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = \beta$.
- (D) é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = \beta = 0$.
- (E) é diagonalizável, quaisquer que sejam α e β .

Q8. Sejam F e G os operadores lineares de \mathbb{R}^2 tais que

$$[F]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que \mathcal{B} denota a base canônica de \mathbb{R}^2 e $\mathcal{C} = \{(1, 0), (1, 1)\}$.
Se $(G \circ F)(1, 1) = (a, b)$, então $a + b$ é igual a

- (A) 4
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 1
- (E) 0

Q9. Considere a transformação linear $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, dada por

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x),$$

para todo $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$, e seja A a matriz de T em relação às bases

$$\mathcal{B} = \{3, 2+x, x^2, x^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, x, 3-x+x^2\}$$

de $P_3(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Então, a soma dos elementos da segunda linha de A é igual a

- (A) 5
- (B) -4
- (C) 0
- (D) -3
- (E) 8

Q10. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ de polinômio característico $p(t) = -t^3 + 4t^2 - 5t + 2$.

- I. A é invertível.
- II. A é necessariamente diagonalizável.
- III. -2 é um autovalor de A .

Está correto o que se afirma em

- (A) I, apenas.
- (B) I e III, apenas.
- (C) II e III, apenas.
- (D) I, II e III.
- (E) II, apenas.

Q11. Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ é tal que $(1, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 1 e $(1, 2)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 3, então a soma dos elementos da primeira coluna de A^{99} é igual a

- (A) $4 - 3^{100}$
- (B) $-2 + 3^{99}$
- (C) $1 + 3^{99}$
- (D) $-2 - 3^{100}$
- (E) $3 + 3^{100}$

Q12. Seja n um inteiro maior do que 1 e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Suponha que A seja diagonalizável e que todos os seus autovalores tenham valor absoluto menor do que 1. Considere as seguintes afirmações:

- I. $-1 < \det(A) < 1$.
- II. Todos os autovalores de A têm multiplicidade geométrica necessariamente igual a 1.
- III. A matriz $A - I_n$ é invertível.

Está correto apenas o que se afirma em

- (A) II e III.
- (B) I.
- (C) III.
- (D) II.
- (E) I e III.

Q13. Considere \mathbb{R}^3 com o produto interno usual. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, e considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (3x + (2a + 6)y, -ax + 3y + bz, 2by + 4z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Se T é simétrico, então o produto dos autovalores de T é igual a

- (A) 8
- (B) 10
- (C) 0
- (D) -30
- (E) 20

Q14. Considere as seguintes afirmações sobre operadores lineares S e T definidos em um mesmo espaço vetorial com produto interno.

- I. Se S e T são simétricos e $S \circ T = T \circ S$, então o operador $S \circ T$ é simétrico.
- II. Se T é simétrico e inversível, então T^{-1} é simétrico.
- III. Se S e T são simétricos e $S \circ T = T \circ S$, então S e T possuem os mesmos autovalores.

Está correto o que se afirma em

- (A) I, II e III.
- (B) I e II, apenas.
- (C) I e III, apenas.
- (D) II, apenas.
- (E) II e III, apenas.

Q15. Seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que:

- $\text{Ker}(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = x_3 + x_4 = 0\}$;
- o polinômio característico de T é $p(t) = t^4 - t^2$;
- $(0, 1, 0, 0) \in \text{Ker}(T + I)$, onde I denota o operador identidade de \mathbb{R}^4 ;
- $(1, 1, 1, 0)$ é autovetor de T .

Então, $T(0, 1, 2, 3)$ é igual a

- (A) $(0, 0, -2, 3)$
- (B) $(0, 0, -6, 5)$
- (C) $(5, 11, 5, 0)$
- (D) $(2, 3, -6, 5)$
- (E) $(-1, -8, -1, 0)$

Q16. Sabendo que 7 é um autovalor de multiplicidade algébrica 3 da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ pode-se afirmar corretamente que também é autovalor}$$

de A o número

- (A) -1
- (B) 3
- (C) 0
- (D) -2
- (E) 6