MAT2458 – ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA II

2ª Prova - 2º semestre de 2018

Q1. Considere a transformação linear $T\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, dada por

$$T\big(p(x)\big) = p(x+1) - p(x),$$

para todo $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$, e seja A a matriz de T em relação às bases

$$\mathcal{B} = \big\{3,\, 2+x,\, x^2,\, x^3\big\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \big\{1,\, x,\, 3-x+x^2\big\}$$

de $P_3(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Então, a soma dos elementos da segunda linha de A é igual a

(a) 8, (b) 5, (c) 0, (d) -3, (e) -4.

Solução: Se v_j é o vetor j-ésimo da base $\mathcal{B}$, então a_{ij} é a coordenada i-ésima do vetor $T(v_j)$, na base $\mathcal{C}$. Temos $T(3) = 0$, logo a primeira coluna de A é $[0,0,0]^t$. $T(2+x) = (2+(x+1)) - (2+x) = 1$ e portanto a segunda coluna de A é $[1,0,0]^t$. Agora $T(x^2) = 2x+1 = 1+2x+0(3-x+x^2)$ e a terceira coluna de A é igual a $[1,2,0]^t$. Finalmente, $T(x^3) = 1+3x+3x^2 = -8+6x+3(3-x+x^2)$ e a quarta coluna de A é $[-8,6,3]^t$. Portanto,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e a soma dos elementos da segunda linha de A é igual a 8.

Q2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Sobre a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, é correto afirmar que

(a) se A é diagonalizável e $b \neq 0$, então $a \neq 1$ e $a \neq 2$.

(b) se $b = 0$, então A não é diagonalizável.

(c) A é sempre diagonalizável.

(d) se $a = 2$, então A não é diagonalizável, qualquer que seja b.

(e) se $a = 1$, então A é diagonalizável quando $b = 1$.

Solução: Sabemos que uma matriz M de ordem $n \times n$ é diagonalizável se, e somente se satisfaz as dois propriedades seguintes:

(i) Todas as raizes de seu polinômio característico são reais;

(ii) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é raiz do polinômio característico, com multiplicidade algébrica $m(\lambda) \geq 2$, então

$$m(\lambda) = \dim(\ker(M - \lambda I_n)) \qquad \text{(ou equivalentemente, } m(\lambda) = n - \text{posto}(M)\text{)}.$$

(a) Verdadeira. A matriz A é triangular e seus autovalores são os elementos da diagonal, isto é $a, 1$ e 2. Seu polinômio característico é $p_A(t) = -(t-a)(t-1)(t-2)$ e portanto satisfaz a propriedade (i). Se $a \neq 1, 2$, todos os autovalores de A têm multiplicidade algébrica 1, logo diagonalizável. Se $b \neq 0$ e $a = 1$,

então $\dim(\ker(A - I_3)) = 3 - \text{posto}(A - I_3) = 3 - \text{posto}\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq m(1) = 2$ logo A não é diagonalizável. Se $b \neq 0$ e $a = 2$, então $\dim(\ker(A - I_3)) = 3 - \text{posto}(A - I_3) = 3 - \text{posto}\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq m(1) = 2$ logo A não é diagonalizável.
(b) Falsa. Se $a \neq 1$ and $a \neq 2$, então A é diagonalizável.
(c) Falsa. Se $a = 1$ e $b \neq 0$, então A não é diagonalizável.
(d) Falsa. Se $a = 2$, então A é diagonalizável para $b = 0$.
(e) Falsa.

Q3. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ de polinômio característico $p(t) = -t^3 + 4t^2 - 5t + 2$.

I. A é invertível.

II. A é necessariamente diagonalizável.

III. -2 é um autovalor de A.

Está correto o que se afirma em Está correto apenas o que se afirma em

(a) I apenas, (b) I, II e III, (c) I e III apenas, (d) II apenas, (e) II e III apenas.

Solução: (I) Verdadeiro. $\det(A) = p(0) = 2 \neq 0$ logo invertível. (II) Falso. Temos que $p(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável e seu polinômio característico é $p(t)$. (III) Falso. Os autovalores de A são exatamente as raízes do polinômio característico, isto é, 1 e 2.

Q4. Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ é tal que $(1, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 1 e $(1, 2)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 3, então a soma dos elementos da primeira coluna de A^{99} é igual a

(a) $4 - 3^{100}$, (b) $1 + 3^{99}$, (c) $-2 + 3^{99}$, (d) $3 + 3^{100}$, (e) $-2 - 3^{100}$.

Solução: Seja $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, a matriz 2×2 com colunas formadas por os autovetores de A, e seja $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, a matriz diagonal com elementos na diagonal os respetivos autovalores. Então $P^{-1}AP = D$ ou equivalentemente $A = PDP^{-1}$. Portanto, $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 3^n & -1 + 3^n \\ 2 - 2 \cdot 3^n & -1 + 2 \cdot 3^n \end{bmatrix}$ para todo inteiro positivo n. A soma dos elementos da primeira coluna de A^{99} é $4 - 3^{100}$.

Q5. Seja n um inteiro maior do que 1 e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Suponha que A seja diagonalizável e que todos os seus autovalores tenham valor absoluto menor do que 1. Considere as seguintes afirmações:

I. $-1 < \det(A) < 1$.

II. Todos os autovalores de A têm multiplicidade geométrica necessariamente igual a 1.

III. A matriz $A - I_n$ é invertível.

Está correto apenas o que se afirma em

(a) I e III, (b) I, (c) II, (d) III, (e) II e III.

Solução: (I) Verdadeira. O determinante de A é o produto dos n autovalores de A, isto é se seu polinômio característico é $p_A(t) = -(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$, então $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, logo $|\det A| = |\lambda_1|\,|\lambda_2|\cdots|\lambda_n| \leq 1$. (II) Falso. Por exemplo $A = (1/2)I_2$. (III) Verdadeiro. Uma matriz é invertível se e somente se 0 não é um autovalor da matriz. Se um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $(A - I_n)v^t = 0$, então $Av^t = v^t$. Porém, por hipótese do problema, 1 não é um autovalor A, e isto implica que o único vetor v em $\mathbb{R}^n$ que satisfaz $Av^t = v^t$ é o vetor nulo. Portanto, a única solução do sistema $(A - I_n)X = 0$ é a nula e 0 não é um autovalor de A. Consequentemente, A é invertível.

Q6. Sabendo que 7 é um autovalor de multiplicidade algébrica 3 da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, pode-se afirmar corretamente que também é autovalor de A o número

(a) -2, (b) 0, (c) -1, (d) 3, (e) 6.

Solução: Dada uma matriz quadrada $n \times n$, a soma dos elementos da diagonal principal é igual à soma das n raízes de seu polinômio característico. Assim, se $\lambda \in \mathbb{R}$ for um autovalor de A, $\lambda \neq 7$ então $\lambda = \text{traço}(A) - 3 \cdot 7 = 19 - 21 = -2$.

Q7. Sejam F e G os operadores lineares de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$[F]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C} = \{(1,0),(1,1)\}$.
Se $(G \circ F)(1,1) = (a,b)$, então $a+b$ é igual a

(a) 3, (b) 0, (c) 1, (d) 2, (e) 4.

Solução: Se $M(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ denota a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$, então

$$\begin{aligned} [G]_{\mathcal{B}} &= M(\mathcal{B} \to \mathcal{C})[G]_{\mathcal{C}} M(\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \\ &= M(\mathcal{B} \to \mathcal{C})[G]_{\mathcal{C}} M(\mathcal{B} \to \mathcal{C})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e $[G \circ F]_{\mathbb{B}} = [G]_{\mathbb{B}}[F]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto, $(G \circ F)\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $a + b = 3$.

Q8. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sobre a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, está correto afirmar que ela

(a) é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = -\beta$.

(b) é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = \beta$.

(c) é diagonalizável, quaisquer que sejam α e β.

(d) é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = \beta = 0$.

(e) não é diagonalizável, quaisquer que sejam α e β.

Solução: Seu polinômio característico é $-x(x-1)^2$ logo será diagonalizável se, e somente se $2 = g(1) = 3 - \text{posto}(A - I_3)$ isto é, $\text{posto}(A - I_3) = 1$. Por outro lado $\text{posto}(A - I_3) = \text{posto}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{posto}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é igual a 1 se $\alpha + \beta = 0$, e é igual a 2 se $\alpha + \beta \neq 0$. Portanto, A diagonalizável se, e somente se $\alpha + \beta = 0$.

Q9. Seja n um inteiro maior do que 1 e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se $(1, 1, \ldots, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ, então

(a) a soma das colunas da matriz $A - \lambda I_n$ é o vetor nulo.

(b) a soma das linhas da matriz A é o vetor nulo.

(c) a soma das colunas da matriz A é o vetor nulo.

(d) a soma das linhas da matriz $A - \lambda I_n$ é o vetor nulo.

(e) a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $A - \lambda I_n$ é zero.

Solução: (a) Verdadeira. Temos que $(A - \lambda I_n)(1, 1, \ldots, 1)^t$ é igual à soma das colunas da matriz $A - \lambda I_n$. Por outro lado, por ser $(1, 1, \ldots, 1)$ autovetor associado ao autovalor λ segue que $(A - \lambda I_n)(1, 1, \ldots, 1)^t$ é o vetor nulo. (b), (c), (d) e (e) são falsas. Contra-exemplo: $\lambda = 3$ e $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Q10. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que:

(i) $\text{Ker}(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = x_3 + x_4 = 0\}$;

(ii) o polinômio característico de T é $p(t) = t^4 - t^2$;

(iii) $(0, 1, 0, 0) \in \text{Ker}(T + I)$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^4$;

(iv) $(1, 1, 1, 0)$ é autovetor de T.

Então, $T(0, 1, 2, 3)$ é igual a

(a) $(5, 11, 5, 0)$

(b) $(0, 0, -2, 3)$

(c) $(2, 3, -6, 5)$

(d) $(0, 0, -6, 5)$

(e) $(-1, -8, -1, 0)$

Solução: Condição (i) afirma que $\operatorname{Ker}(T) = [v_1, v_2]$ onde $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1, -1)$. Por (iii) sabemos que $T(v_3) = -v_3$ para $v_3 = (0, 1, 0, 0)$. Por (ii), os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$ com multiplicidade algébrica 2, $\lambda_2 = -1$ com multiplicidade algébrica 1 e $\lambda_3 = 1$ com multiplicidade algébrica 1. Assim o auto-espaço associado ao autovalor $\lambda = 0$ é $V(0) = [v_1, v_2]$ e o auto-espaço associado ao autovalor $\lambda = -1$ é $V(-1) = [v_2]$. Por(iv), $v_4 = (1, 1, 1, 0)$ é um autovetor de T. Já que não está nos auto-espaços associados aos autovalores 0 e -1 seque que v_4 é um autovetor associado ao autovalor 1, isto é $T(v_4) = v_4$. Para determinar a imagem por T de $v = (0, 1, 2, 3)$ vamos a exprimir este vetor em termos da base $\Phi = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Escalonamos a matriz associada à equação vetorial $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = v$ e obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

logo $x = -2$, $y = -3$, $z = -6$ e $t = 5$. Assim, $T(v) = T(-2v_1 - 3v_2 - 6v_3 + 5v_4) = -2T(v_1) - 3T(v_2) - 6T(v_3) + 5T(v_4) = 6v_3 + 5v_4 = (5, 11, 5, 0)$.

Q11. Seja V o espaço vetorial das funções $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas, munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Seja T operador linear de V definido por $\big(T(f)\big)(x) = f(1-x)$, com $x \in [0,1]$, para todo $f \in V$. Considere as seguintes afirmações:

I. T é simétrico.

II. 1 é um autovalor de T.

III. T é injetor.

Está correto o que se afirma em

(a) I, II e III.

(b) III, apenas.

(c) I e II, apenas.

(d) II e III, apenas.

(e) II, apenas.

Solução: (I) Verdadeira. Dadas $f, g \in V$ podemos escrever, efetuando a mudança de variáveis $y = 1-x$,

$$\langle T(f), g \rangle = \int_0^1 f(1-x)g(x)\,dx = \int_0^1 f(y)g(1-y)\,dy = \langle f, T(g) \rangle \ ,$$

e portanto o operador é simétrico, como afirmado.

(II) Verdadeira. Existem, de fato, infinitas funções $f \in V$ que são autovetores de T com autovalor 1. Por exemplo, considere o polinômio quadrático $p(x) = x(1-x)$ (restrito ao intervalo $[0,1]$). Então $p \in V$ e temos

$$(T(p))(x) = p(1-x) = (1-x)(1-(1-x)) = (1-x)x = p(x) \ ,$$

para todo $x \in [0,1]$. Ou seja, temos $T(p) = p$ e portanto p é autovetor de T com autovalor 1.

(III) Verdadeira. Como T é linear, para verificar que T é injetor basta calcular o núcleo de T. Seja $f \in V$ tal que $T(f) = 0$. Então temos $f(1-x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$; mas isto significa que f é a função identicamente nula. Portanto, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. De fato, o operador é **bijetor**. Para ver isto, basta observar que $T^2 = T \circ T$ é o operador identidade, o que mostra que T é inversível, e o operador T^{-1} é igual a T.

Resumindo, todas as afirmações são corretas, e portanto a alternativa correta é (a).

Observação complementar: É possível calcular **todos** os autovalores de T. Suponha que $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de T, e seja $f \neq 0$ um autovetor com autovalor λ. Como $T^2 = I$ (I=operador identidade), temos $f = T^2(f) = T(T(f)) = T(\lambda f) = \lambda T(f) = \lambda^2 f$, ou seja, $(\lambda^2 - 1)f = 0$. Como $f \neq 0$, segue-se que $\lambda = \pm 1$, ou seja, os únicos autovalores possíveis para T são 1 e -1. Já sabemos que 1 é autovalor de T. Para ver que -1 também é autovalor, considere a função $\varphi \in V$ dada por $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$. Então $(T(\varphi))(x) = \sin(2\pi(1-x)) = \sin(2\pi - 2\pi x) = -\sin(2\pi x) = -\varphi(x)$ para todo $x \in [0,1]$, ou seja, $T(\varphi) = -\varphi$.

Q12. Considere as seguintes afirmações sobre operadores lineares S e T definidos em um mesmo espaço vetorial com produto interno.

I. Se S e T são simétricos e $S \circ T = T \circ S$, então o operador $S \circ T$ é simétrico.

II. Se T é simétrico e inversível, então T^{-1} é simétrico.

III. Se S e T são simétricos e $S \circ T = T \circ S$, então S e T possuem os mesmos autovalores.

Está correto o que se afirma em

(a) I e II, apenas.

(b) II e III, apenas.

(c) I e III, apenas.

(d) II, apenas.

(e) I, II e III.

Solução: (I) Verdadeira. Seja V o espaço vetorial em questão, e sejam $v, w \in V$ quaisquer. Então temos:

$$\begin{aligned} \langle S \circ T(v), w \rangle &= \langle T(v), S(w) \rangle && \text{pois } S \text{ é simétrico} \\ &= \langle v, T \circ S(w) \rangle && \text{pois } T \text{ é simétrico} \\ &= \langle v, S \circ T(w) \rangle && \text{pois } T \circ S = S \circ T \ , \end{aligned}$$

e portanto $S \circ T$ é simétrico.

(II) Verdadeira. Sendo I o operador identidade de V, temos $T \circ T^{-1} = I$. Assim, para quaisquer $v, w \in V$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \langle T^{-1}(v), w \rangle &= \langle T^{-1}(v), T \circ T^{-1}(w) \rangle \\ &= \langle T \circ T^{-1}(v), T^{-1}(w) \rangle && \text{pois } T \text{ é simétrico} \\ &= \langle v, T^{-1}(w) \rangle \ . \end{aligned}$$

Isto mostra que o operador T^{-1} é simétrico.

(III) Falsa. Para ver isto, basta tomar $T = I$ (operador identidade) e $S = \lambda T$, onde λ é um número real qualquer diferente de 1. Então $S \circ T = T \circ S$ (o operador identidade comuta com qualquer outro operador). No entanto, o único autovalor de T é 1, enquanto o único autovalor de S é $\lambda \neq 1$.

Portanto a alternativa correta é (a).

Q13. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, e considere o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = \big(3x + (2a+6)y\,,\ -ax + 3y + bz\,,\ 2by + 4z\big),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Se T é simétrico, então o produto dos autovalores de T é igual a

(a) 20

(b) 10

(c) -30

(d) 8

(e) 0

Solução: A matriz de T na base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2a+6 & 0 \\ -a & 3 & b \\ 0 & 2b & 4 \end{bmatrix}.$$

Como T é simétrico em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^3$, a matriz A deve ser simétrica, isto é, $A = A^t$. Em particular, devemos ter $2a+6 = -a$ e $b = 2b$, ou seja, $a = -2$ e $b = 0$. Assim, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico de A, obtemos:

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} 3-t & 2 & 0 \\ 2 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 4-t \end{bmatrix} = -(t-1)(t-4)(t-5)\ .$$

Logo, os autovalores de A (e portanto de T) são 1, 4, 5, cujo produto é $1 \cdot 4 \cdot 5 = 20$. Portanto, a alternativa correta é (a).

Q14. Seja $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = -t^3(t+1)(t-3)$. Denote o operador identidade de $\mathbb{R}^5$ por I. Qual das seguintes afirmações é **FALSA**?

(a) Se T é diagonalizável, então $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T+I)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T-3I)\big) = 5$.

(b) Vale $\dim\big(\mathrm{Ker}(T+I)\big) = 1$.

(c) Se $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$, então T não é diagonalizável.

(d) Vale $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T+I)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T-3I)\big) \leq 5$.

(e) Se $v \in \mathbb{R}^5$ é tal que $T(v) = 2v$, então v é o vetor nulo.

Solução: (a) Falsa. Os autovalores de T são 0, -1 e 3. Os auto-espaços correspondentes são:

$$V(0) = \mathrm{Ker}\,(T)\ ,\ V(-1) = \mathrm{Ker}\,(T+I)\ ,\ V(3) = \mathrm{Ker}\,(T-3I)\ .$$

Se T é diagonalizável, então $\mathbb{R}^5 = V(0) \oplus V(-1) \oplus V(3)$; portanto $\dim(V(0)) + \dim(V(-1)) + \dim(V(3)) = 5$, ou seja:

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(T+I)) + \dim(\mathrm{Ker}(T-3I)) = 5\ .$$

Mas temos $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 5 - \dim(\mathrm{Ker}(T))$, $\dim(\mathrm{Im}(T+I)) = 5 - \dim(\mathrm{Ker}(T+I))$ e $\dim(\mathrm{Im}(T-3I)) = 5 - \dim(\mathrm{Ker}(T-3I))$. Portanto:

$$\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T+I)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T-3I)\big) = 15 - 5 = 10 \ .$$

(b) Verdadeira. O autovalor -1 tem multiplicidade algébrica igual a 1, e portanto sua multiplicidade geométrica, que é a dimensão de $\mathrm{Ker}(T+I)$, também é igual a 1.

(c) Verdadeira. Se $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$, então $\dim\left(\mathrm{Ker}(T)\right) = 5 - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$. Logo o autovalor 0 tem multiplicidade geométrica igual a 2, que é estritamente menor que sua multiplicidade algébrica, que é 3. Portanto T não pode ser diagonalizável.

(d) Verdadeira. A soma que aparece no lado esquerdo da desigualdade do item(d) é a soma das multiplicidades geométricas dos três autovalores de T. Como cada multiplicidade geométrica de cada autovalor é menor ou igual à sua multiplicidade algébrica, segue-se que a referida soma é menor ou igual à soma das multiplicidades algébricas, que é igual a 5 (grau do polinômio característico).

(e) Verdadeira. Se v não fosse o vetor nulo, então 2 seria um autovalor de T, o que não é o caso.

Q15. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e seja $T\colon V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = (a-t)^2(b-t)^{n-2}$, em que a e b são números reais distintos. Sejam $v, w \in V$ vetores não nulos tais que $T(v) = av$ e $T(w) = bw$. Denote o operador identidade de V por I. Qual das seguintes afirmações é **FALSA**?

(a) O vetor $v + w$ é um autovetor de T.

(b) O conjunto $\{v, w\}$ é linearmente independente.

(c) Os únicos autovalores de T são a e b.

(d) Se $\mathrm{Ker}(T - aI) = [v]$, então T não é diagonalizável.

(e) Se T é diagonalizável, então existe $u \in V$ tal que $T(u) = au$ e $\{u, v\}$ é linearmente independente.

Solução: (a) Falsa. Se $v + w$ fosse autovetor de T, então teríamos $T(v+w) = \lambda(v+w)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Mas então, como T é linear, teríamos $av + bw = \lambda(v+w)$, ou seja $(a-\lambda)v + (b-\lambda)w = 0$. Como v e w são autovetores pertencentes a autovalores distintos, eles são linearmente independentes. Logo, teríamos $a - \lambda = 0 = b - \lambda$, o que é impossível.

(b) Verdadeira. Como visto em aula, autovetores pertencentes a autovalores distintos são sempre linearmente independentes. Este é justamente o caso aqui, pois $a \neq b$.

(c) Verdadeira. As únicas raízes do polinômio característico são a (com multiplicidade algébrica 2) e b (com multiplicade algébrica $n-2$), e sabemos que todo autovalor é raiz do polinômio característico.

(d) Verdadeira. Se $\mathrm{Ker}(T - aI) = [v]$, então $\dim(\mathrm{Ker}(T - aI)) = 1$, ou seja, a multiplicidade geométrica do autovalor a é 1, que é estritamente menor que sua multiplicidade algébrica. Portanto T não pode ser diagonalizável.

(e) Verdadeira. Se T é diagonalizável, então em particular $\dim(\mathrm{Ker}(T - aI)) = 2$. Logo existe um vetor $u \in \mathrm{Ker}(T - aI)$ que não está em $[v]$. Os vetores u e v são portanto linearmente independentes, e são ambos autovetores de T com autovalor a. (Segue-se que $\{u, v\}$ é de fato uma base para $\mathrm{Ker}(T - aI)$.)

Q16. Seja n um inteiro positivo, e considere as seguintes afirmações sobre o operador linear $T\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ definido por $T\big(p(x)\big) = xp'(x)$, para todo $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$, em que $p'(x)$ denota a derivada de $p(x)$.

I. O operador T é diagonalizável.

II. A soma dos autovalores de T é $n(n+1)/2$.

III. O operador T é inversível.

Está correto o que se afirma em

(a) I e II, apenas.

(b) II e III, apenas.

(c) I e III, apenas.

(d) II, apenas.

(e) I, II e III.

Solução: Lembramos que os polinômios $p_k(x) = x^k$ com $k = 0, 1, \ldots, n$ formam uma base para o espaço $P_n(\mathbb{R})$. Seja $\mathcal{B}$ esta base. Observe que $T(p_k(x)) = xp'_k(x) = kx^k = kp_k(x)$ para todo k, e portanto $p_k(x)$ é autovetor de T com autovalor k, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$. Assim, vemos que T possui $n + 1$ autovalores distintos, a saber $0, 1, \ldots, n$, e $\mathcal{B}$ é uma base formada por autovetores de T. Logo T é diagonalizável, e a soma de seus autovalores é $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Isto mostra que as afirmações (I) e (II) são verdadeiras. Por outro lado, a afirmação (III) é falsa, pois, como 0 é autovalor de T, o operador T não é injetor, e portanto não pode ser inversível. Assim, a alternativa correta é (a).