

Nesta prova, adotam-se as seguinte convenções:

- As equações de quádricas e cônicas estão sempre dadas em relação a um sistema de coordenadas $\Sigma = (0, \mathcal{B})$, em que \mathcal{B} é uma base ortonormal.
- O operador identidade de um espaço vetorial será denotado por I .
- A base canônica de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n será denotada por **can**.
- Se α é um número complexo, $\bar{\alpha}$ denotará seu conjugado complexo.

Q1. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica tal que $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Se 4 é um autovalor de A , então a solução $X(t)$ do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (1, 2, 3)$ é dada por

- (A) $(-2e^t + 3e^{4t}, e^t + e^{4t}, 3e^{4t})$
- (B) $(e^{4t}, 2e^{4t}, 3e^{4t})$
- (C) $(-1 + 2e^t, 2e^t, 1 + 2e^t)$
- (D) $(1, 1 + e^{4t}, -1 + 4e^{4t})$
- (E) $(-1 + 2e^{4t}, 2e^{4t}, 1 + 2e^{4t})$

Q2. Seja U um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear e sejam λ_1, λ_2 e λ_3 autovalores de T dois a dois distintos. Para cada $i = 1, 2, 3$, denote $V_i = \text{Ker}(T - \lambda_i I)$. Considere as seguintes afirmações:

- I. Se $\dim(U) = 4$ e $\dim(V_1) = 2$, então T é simétrico.
- II. Se T é simétrico, então $V_1 \subset (V_2^\perp \cap V_3^\perp)$ e $V_2 \subset V_3^\perp$.
- III. Se T é diagonalizável, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os únicos autovalores de T e valem as inclusões $V_1 \subset (V_2^\perp \cap V_3^\perp)$ e $V_2 \subset V_3^\perp$, então T é simétrico.

Está correto o que se afirma em

- (A) I, apenas.
- (B) I e III, apenas.
- (C) I, II e III.
- (D) II e III, apenas.
- (E) II, apenas.

Q3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere as seguintes afirmações sobre a equação

$$-6x^2 + ay^2 - 6z^2 + 2xz = b$$

nas variáveis x, y, z :

- I. Se $a < 0$ e $b > 0$, então a equação não possui solução.
- II. Se $a < 0$ e $b = 0$, então a equação não possui solução.
- III. Se $a > 0$ e $b = 0$, então a equação possui infinitas soluções.

Está correto apenas o que se afirma em

- (A) I e II.
- (B) II e III.
- (C) I e III.
- (D) I.
- (E) II.

Q4. Seja n um inteiro maior do que 1 e seja $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ o operador linear no espaço vetorial complexo \mathbb{C} cuja matriz, em relação à base canônica de \mathbb{C}^n , é $A \in M_n(\mathbb{C})$. Denote por p_T o polinômio característico de T . Considere as seguintes afirmações:

- I. Se $n = 2$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T tal que $\lambda \notin \mathbb{R}$, então T é necessariamente diagonalizável.
- II. Se $A \notin M_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p_T tal que $\alpha \notin \mathbb{R}$, então certamente $p_T(\bar{\alpha}) \neq 0$.
- III. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T de multiplicidade algébrica $n-1$, então T será diagonalizável se, e somente se, a dimensão do subespaço complexo $\text{Ker}(T - \lambda I)$ de \mathbb{C}^n for igual a $n-1$.

Está correto apenas o que se afirma em

- (A) II.
- (B) I e II.
- (C) III.
- (D) II e III.
- (E) I e III.

Q5. Sabendo que 1 e $-2+i$ são raízes do polinômio característico da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{bmatrix} \text{ e que o auto-espaço de } A \text{ associado ao autovalor}$$

$-2+i$ é gerado pelo vetor $(2, -3+i, 3-i)$, pode-se afirmar corretamente que uma base para o espaço vetorial formado pelas soluções reais do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ é dada por

- (A) $\{e^t(1, 0, 1), e^{-2t}(2 \cos t, -3 \cos t + 2 \sin t, 3 \cos t + 2 \sin t), e^{-2t}(2 \sin t, 3 \cos t - 2 \sin t, -3 \cos t - 2 \sin t)\}$
- (B) $\{e^t(1, 1, 0), e^{-2t}(2 \cos t, -3 \cos t + 2 \sin t, 3 \cos t + 2 \sin t), e^{-2t}(-2 \sin t, 3 \cos t - 2 \sin t, -3 \cos t - 2 \sin t)\}$
- (C) $\{e^t(1, 1, 0), e^{-2t}(2 \cos t, 2 \cos t - 3 \sin t, \cos t + \sin t), e^{-2t}(2 \sin t, 3 \cos t + \sin t, 2 \cos t - \sin t)\}$
- (D) $\{e^t(1, 0, 1), e^{-2t}(2 \cos t, -3 \cos t - 4 \sin t, 3 \cos t + 4 \sin t), e^{-2t}(2 \sin t, -2 \cos t + 4 \sin t, \cos t - 2 \sin t)\}$
- (E) $\{e^t(1, 1, 0), e^{-2t}(2 \cos t, -3 \cos t - \sin t, 3 \cos t + \sin t), e^{-2t}(2 \sin t, \cos t - 3 \sin t, -\cos t + 3 \sin t)\}$

Q6. Seja $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ um operador linear do espaço vetorial complexo \mathbb{C}^3 tal que $[T]_{\text{can}} \in M_3(\mathbb{R})$. Sabendo que T possui 3 autovalores distintos e que $(1, 1, 0)$ é um autovetor de T , qual dos seguintes vetores de \mathbb{C}^3 certamente **não** é um autovetor de T ?

- (A) $(1, 1, 0) + i(1, 1, 1)$
- (B) $3i(1, 1, 0)$
- (C) $(1, 1, 0) + 4(1, 1, 0)$
- (D) $(1, 1, 0) + 4i(1, 1, 0)$
- (E) $(1, 1, 1) + i(2, 2, 2)$

Q7. Seja $a \in \mathbb{R}$. A cônica de equação $2xy + 3x - y + a = 0$ é um par de retas concorrentes se, e somente se, a for igual a

- (A) $-3/2$
- (B) $-7/3$
- (C) $7/2$
- (D) $9/2$
- (E) $5/3$

Q8. Em \mathbb{R}^4 , com o produto interno usual, seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um operador linear cujos autovalores distintos são λ_1, λ_2 e λ_3 e que satisfaz $\text{Ker}(T - \lambda_1 I) = [(1, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 0)]$ e $\text{Ker}(T - \lambda_2 I) = [(1, 0, -2, 1)]$. Considere as seguintes afirmações:

- I. T certamente não é simétrico.
- II. Se T é simétrico, então existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\text{Ker}(T - \lambda_3 I) = [(a, b, c, d)]$ com $abcd = 0$.
- III. T certamente é diagonalizável, e existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\text{Ker}(T - \lambda_3 I) = [(a, b, c, d)]$ com $abcd = 0$.

Está correto apenas o que se afirma em

- (A) I e III.
- (B) III.
- (C) II.
- (D) II e III.
- (E) I.

Q9. Seja n um inteiro maior do que 1. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- I. Se A diagonalizável sobre \mathbb{C} , então A é também diagonalizável sobre \mathbb{R} .
- II. Seja L o operador linear do espaço vetorial complexo \mathbb{C}^n tal que $[L]_{\text{can}} = A$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de L , então $\dim(\text{Ker}(L - \lambda I)) = \dim(\text{Ker}(L - \bar{\lambda} I))$.
- III. Seja T o operador linear do espaço vetorial real \mathbb{R}^n tal que $[T]_{\text{can}} = A$. Se A é diagonal e \mathcal{C} é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n em relação ao produto interno usual, então $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.

Está correto o que se afirma em

- (A) III, apenas.
- (B) II, apenas.
- (C) I, II e III.
- (D) I e II, apenas.
- (E) I e III, apenas.

Q10. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$. Sabendo que $X(t) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + e^{-t})$ é solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$, pode-se afirmar corretamente que o determinante de A é igual a

- (A) 0
- (B) -1
- (C) 2
- (D) 1
- (E) -2

Q11. A cônica de equação $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 1 = 0$ é

- (A) uma hipérbole.
- (B) uma parábola.
- (C) uma elipse.
- (D) um par de retas paralelas.
- (E) um par de retas concorrentes.

Q12. A dimensão do subespaço vetorial complexo de \mathbb{C}^5 gerado pelos vetores

$$(1, 2 + i, -1, 0, 1 + i), (1 - i, 3 - i, -1 + i, 0, 2), (1, 1 + i, 0, 1 - i, 0), \\ (2 - i, 3 + i, 0, 1 - 3i, 0), (1, 2i, 1 - i, 1 - 3i, -2)$$

é igual a

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 3
- (D) 5
- (E) 1

Q13. Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear simétrico. Se v e w são vetores de V tais que $v \in \text{Ker}(T - 3I)$, $w \in \text{Ker}(T - 4I)$ e $\|v\| = \|w\| = 2$, então $\|T(v - w)\|$ é igual a

- (A) $\sqrt{70}$
- (B) $\sqrt{85}$
- (C) 10
- (D) $\sqrt{30}$
- (E) 20

Q14. Considere as seguintes matrizes

$$L = \begin{bmatrix} 77 & 99 & \pi^2 \\ 99 & e^5 & 55 \\ \pi^2 & 55 & 11 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 7 - 8i & 99 & 88 \\ 0 & 97 + 79i & \pi^{10} \\ 0 & 0 & 5 - 8i \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 + i & 1 \\ 1 & 1 - i \end{bmatrix},$$

e seja $P \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz que tem $3 - 7i$ e $88 - \pi i$ como autovalores. São diagonalizáveis sobre \mathbb{C}

- (A) L e M , apenas.
- (B) N e P , apenas.
- (C) L , M , N e P .
- (D) L , M e N , apenas.
- (E) L , M e P , apenas.

Q15. Considere as matrizes $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 + i & -2i \\ -4i & 3 - i \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Sa-

bendo que $Q^{-1}AQ$ é uma matriz diagonal, é correto afirmar que a soma dos elementos na segunda coluna de A^{400} é igual a

- (A) $3 \cdot 2^{201}$
- (B) 2^{200}
- (C) 2^{201}
- (D) $3 \cdot 2^{200}$
- (E) $3 \cdot 2^{203}$

Q16. Considere \mathbb{R}^2 munido do produto interno usual. Se $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o operador linear simétrico que tem 5 como autovalor e que satisfaz $T(1, 2) = (3, 6)$, então a soma dos elementos na segunda coluna de $[T]_{\text{can}}$ é

- (A) $13/5$
- (B) $11/5$
- (C) $3/5$
- (D) $27/5$
- (E) $-8/5$