

Nesta prova, adotam-se as seguintes convenções:

- As equações de quádricas e cônicas estão sempre dadas em relação a um sistema de coordenadas  $\Sigma = (0, \mathcal{B})$ , em que  $\mathcal{B}$  é uma base ortonormal.
- O operador identidade de um espaço vetorial será denotado por  $I$ .
- A base canônica de  $\mathbb{R}^n$  ou de  $\mathbb{C}^n$  será denotada por **can**.
- Se  $\alpha$  é um número complexo,  $\bar{\alpha}$  denotará seu conjugado complexo.

**Q1.** Considere as matrizes  $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3+i & -2i \\ -4i & 3-i \end{bmatrix}$  e  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ . Sabendo que  $Q^{-1}AQ$  é uma matriz diagonal, é correto afirmar que a soma dos elementos na segunda coluna de  $A^{400}$  é igual a

- (A)  $3 \cdot 2^{200}$
- (B)  $2^{200}$
- (C)  $3 \cdot 2^{201}$
- (D)  $3 \cdot 2^{203}$
- (E)  $2^{201}$

**Q2.** Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica tal que  $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Se 4 é um autovalor de  $A$ , então a solução  $X(t)$  do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  que satisfaz  $X(0) = (1, 2, 3)$  é dada por

- (A)  $(-1 + 2e^t, 2e^t, 1 + 2e^t)$
- (B)  $(-2e^t + 3e^{4t}, e^t + e^{4t}, 3e^{4t})$
- (C)  $(e^{4t}, 2e^{4t}, 3e^{4t})$
- (D)  $(-1 + 2e^{4t}, 2e^{4t}, 1 + 2e^{4t})$
- (E)  $(1, 1 + e^{4t}, -1 + 4e^{4t})$

**Q3.** Considere as seguintes matrizes

$$L = \begin{bmatrix} 77 & 99 & \pi^2 \\ 99 & e^5 & 55 \\ \pi^2 & 55 & 11 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 7 - 8i & 99 & 88 \\ 0 & 97 + 79i & \pi^{10} \\ 0 & 0 & 5 - 8i \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 + i & 1 \\ 1 & 1 - i \end{bmatrix},$$

e seja  $P \in M_4(\mathbb{R})$  uma matriz que tem  $3 - 7i$  e  $88 - \pi i$  como autovalores. São diagonalizáveis sobre  $\mathbb{C}$

- (A)  $L$ ,  $M$  e  $N$ , apenas.
- (B)  $N$  e  $P$ , apenas.
- (C)  $L$  e  $M$ , apenas.
- (D)  $L$ ,  $M$  e  $P$ , apenas.
- (E)  $L$ ,  $M$ ,  $N$  e  $P$ .

**Q4.** Seja  $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  um operador linear do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^3$  tal que  $[T]_{\text{can}} \in M_3(\mathbb{R})$ . Sabendo que  $T$  possui 3 autovalores distintos e que  $(1, 1, 0)$  é um autovetor de  $T$ , qual dos seguintes vetores de  $\mathbb{C}^3$  certamente **não** é um autovetor de  $T$ ?

- (A)  $(1, 1, 0) + 4i(1, 1, 0)$
- (B)  $3i(1, 1, 0)$
- (C)  $(1, 1, 0) + 4(1, 1, 0)$
- (D)  $(1, 1, 1) + i(2, 2, 2)$
- (E)  $(1, 1, 0) + i(1, 1, 1)$

**Q5.** Seja  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Sabendo que  $X(t) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + e^{-t})$  é solução do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$ , pode-se afirmar corretamente que o determinante de  $A$  é igual a

- (A) 2
- (B) -2
- (C) 0
- (D) -1
- (E) 1

**Q6.** Seja  $n$  um inteiro maior do que 1. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

- I. Se  $A$  diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ , então  $A$  é também diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- II. Seja  $L$  o operador linear do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^n$  tal que  $[L]_{\text{can}} = A$ . Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é autovalor de  $L$ , então  $\dim(\text{Ker}(L - \lambda I)) = \dim(\text{Ker}(L - \bar{\lambda} I))$ .
- III. Seja  $T$  o operador linear do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$  tal que  $[T]_{\text{can}} = A$ . Se  $A$  é diagonal e  $\mathcal{C}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  em relação ao produto interno usual, então  $[T]_{\mathcal{C}}$  é diagonal.

Está correto o que se afirma em

- (A) I e II, apenas.
- (B) III, apenas.
- (C) I e III, apenas.
- (D) I, II e III.
- (E) II, apenas.

**Q7.** Seja  $U$  um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, seja  $T: U \rightarrow U$  um operador linear e sejam  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  autovalores de  $T$  dois a dois distintos. Para cada  $i = 1, 2, 3$ , denote  $V_i = \text{Ker}(T - \lambda_i I)$ . Considere as seguintes afirmações:

- I. Se  $\dim(U) = 4$  e  $\dim(V_1) = 2$ , então  $T$  é simétrico.
- II. Se  $T$  é simétrico, então  $V_1 \subset (V_2^\perp \cap V_3^\perp)$  e  $V_2 \subset V_3^\perp$ .
- III. Se  $T$  é diagonalizável,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  são os únicos autovalores de  $T$  e valem as inclusões  $V_1 \subset (V_2^\perp \cap V_3^\perp)$  e  $V_2 \subset V_3^\perp$ , então  $T$  é simétrico.

Está correto o que se afirma em

- (A) I, apenas.
- (B) I e III, apenas.
- (C) I, II e III.
- (D) II e III, apenas.
- (E) II, apenas.

**Q8.** Seja  $n$  um inteiro maior do que 1 e seja  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  o operador linear no espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}$  cuja matriz, em relação à base canônica de  $\mathbb{C}^n$ , é  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Denote por  $p_T$  o polinômio característico de  $T$ . Considere as seguintes afirmações:

- I. Se  $n = 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor de  $T$  tal que  $\lambda \notin \mathbb{R}$ , então  $T$  é necessariamente diagonalizável.
- II. Se  $A \notin M_n(\mathbb{R})$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$  é uma raiz de  $p_T$  tal que  $\alpha \notin \mathbb{R}$ , então certamente  $p_T(\bar{\alpha}) \neq 0$ .
- III. Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor de  $T$  de multiplicidade algébrica  $n-1$ , então  $T$  será diagonalizável se, e somente se, a dimensão do subespaço complexo  $\text{Ker}(T - \lambda I)$  de  $\mathbb{C}^n$  for igual a  $n-1$ .

Está correto apenas o que se afirma em

- (A) II.
- (B) I e III.
- (C) I e II.
- (D) II e III.
- (E) III.

**Q9.** Seja  $a \in \mathbb{R}$ . A cônica de equação  $2xy + 3x - y + a = 0$  é um par de retas concorrentes se, e somente se,  $a$  for igual a

- (A)  $7/2$
- (B)  $5/3$
- (C)  $9/2$
- (D)  $-3/2$
- (E)  $-7/3$

**Q10.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e considere as seguintes afirmações sobre a equação

$$-6x^2 + ay^2 - 6z^2 + 2xz = b$$

nas variáveis  $x, y, z$ :

- I. Se  $a < 0$  e  $b > 0$ , então a equação não possui solução.
- II. Se  $a < 0$  e  $b = 0$ , então a equação não possui solução.
- III. Se  $a > 0$  e  $b = 0$ , então a equação possui infinitas soluções.

Está correto apenas o que se afirma em

- (A) I e III.
- (B) I.
- (C) I e II.
- (D) II e III.
- (E) II.

**Q11.** A dimensão do subespaço vetorial complexo de  $\mathbb{C}^5$  gerado pelos vetores

$$(1, 2 + i, -1, 0, 1 + i), (1 - i, 3 - i, -1 + i, 0, 2), (1, 1 + i, 0, 1 - i, 0), \\ (2 - i, 3 + i, 0, 1 - 3i, 0), (1, 2i, 1 - i, 1 - 3i, -2)$$

é igual a

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 3
- (D) 1
- (E) 5

**Q12.** A cônica de equação  $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 1 = 0$  é

- (A) um par de retas paralelas.
- (B) uma elipse.
- (C) uma hipérbole.
- (D) um par de retas concorrentes.
- (E) uma parábola.

**Q13.** Sabendo que  $1$  e  $-2+i$  são raízes do polinômio característico da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{bmatrix} \text{ e que o auto-espaço de } A \text{ associado ao autovalor}$$

$-2+i$  é gerado pelo vetor  $(2, -3+i, 3-i)$ , pode-se afirmar corretamente que uma base para o espaço vetorial formado pelas soluções reais do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  é dada por

- (A)  $\{e^t(1, 1, 0), e^{-2t}(2 \cos t, 2 \cos t - 3 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t), e^{-2t}(2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t + \operatorname{sen} t, 2 \cos t - \operatorname{sen} t)\}$
- (B)  $\{e^t(1, 0, 1), e^{-2t}(2 \cos t, -3 \cos t - 4 \operatorname{sen} t, 3 \cos t + 4 \operatorname{sen} t), e^{-2t}(2 \operatorname{sen} t, -2 \cos t + 4 \operatorname{sen} t, \cos t - 2 \operatorname{sen} t)\}$
- (C)  $\{e^t(1, 1, 0), e^{-2t}(2 \cos t, -3 \cos t - \operatorname{sen} t, 3 \cos t + \operatorname{sen} t), e^{-2t}(2 \operatorname{sen} t, \cos t - 3 \operatorname{sen} t, -\cos t + 3 \operatorname{sen} t)\}$
- (D)  $\{e^t(1, 0, 1), e^{-2t}(2 \cos t, -3 \cos t + 2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t + 2 \operatorname{sen} t), e^{-2t}(2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t - 2 \operatorname{sen} t, -3 \cos t - 2 \operatorname{sen} t)\}$
- (E)  $\{e^t(1, 1, 0), e^{-2t}(2 \cos t, -3 \cos t + 2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t + 2 \operatorname{sen} t), e^{-2t}(-2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t - 2 \operatorname{sen} t, -3 \cos t - 2 \operatorname{sen} t)\}$

**Q14.** Considere  $\mathbb{R}^2$  munido do produto interno usual. Se  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o operador linear simétrico que tem 5 como autovalor e que satisfaz  $T(1, 2) = (3, 6)$ , então a soma dos elementos na segunda coluna de  $[T]_{\text{can}}$  é

- (A)  $11/5$
- (B)  $-8/5$
- (C)  $27/5$
- (D)  $3/5$
- (E)  $13/5$

**Q15.** Seja  $V$  um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear simétrico. Se  $v$  e  $w$  são vetores de  $V$  tais que  $v \in \text{Ker}(T - 3I)$ ,  $w \in \text{Ker}(T - 4I)$  e  $\|v\| = \|w\| = 2$ , então  $\|T(v - w)\|$  é igual a

- (A)  $\sqrt{30}$
- (B) 20
- (C) 10
- (D)  $\sqrt{70}$
- (E)  $\sqrt{85}$

**Q16.** Em  $\mathbb{R}^4$ , com o produto interno usual, seja  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  um operador linear cujos autovalores distintos são  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  e que satisfaz  $\text{Ker}(T - \lambda_1 I) = [(1, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 0)]$  e  $\text{Ker}(T - \lambda_2 I) = [(1, 0, -2, 1)]$ . Considere as seguintes afirmações:

- I.  $T$  certamente não é simétrico.
- II. Se  $T$  é simétrico, então existem  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que  $\text{Ker}(T - \lambda_3 I) = [(a, b, c, d)]$  com  $abcd = 0$ .
- III.  $T$  certamente é diagonalizável, e existem  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que  $\text{Ker}(T - \lambda_3 I) = [(a, b, c, d)]$  com  $abcd = 0$ .

Está correto apenas o que se afirma em

- (A) II e III.
- (B) I e III.
- (C) III.
- (D) II.
- (E) I.