Nesta prova, adotam-se as seguinte convenções:

- As equações de quádricas e cônicas estão sempre dadas em relação a um sistema de coordenadas $\Sigma = (0, \mathcal{B})$, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal.
- O operador identidade de um espaço vetorial será denotado por I.
- A base canônica de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ será denotada por can.
- Se α é um número complexo, $\overline{\alpha}$ denotará seu conjugado complexo.

Q1. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica tal que $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Se 4 é um autovalor de A, então a solução $X(t)$ do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (1, 2, 3)$ é dada por

(A) $\big(1,\, 1 + e^{4t},\, -1 + 4e^{4t}\big)$

(B) $\big(-1 + 2e^{t},\, 2e^{t},\, 1 + 2e^{t}\big)$

(C) $\big(-1 + 2e^{4t},\, 2e^{4t},\, 1 + 2e^{4t}\big)$

(D) $\big(-2e^{t} + 3e^{4t},\, e^{t} + e^{4t},\, 3e^{4t}\big)$

(E) $\big(e^{4t},\, 2e^{4t},\, 3e^{4t}\big)$

Q2. Seja n um inteiro maior do que 1 e seja $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o operador linear no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}$ cuja matriz, em relação à base canônica de $\mathbb{C}^n$, é $A \in M_n(\mathbb{C})$. Denote por p_T o polinômio característico de T. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $n = 2$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T tal que $\lambda \notin \mathbb{R}$, então T é necessariamente diagonalizável.

II. Se $A \notin M_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p_T tal que $\alpha \notin \mathbb{R}$, então certamente $p_T(\overline{\alpha}) \neq 0$.

III. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T de multiplicidade algébrica $n-1$, então T será diagonalizável se, e somente se, a dimensão do subespaço complexo $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ de $\mathbb{C}^n$ for igual a $n-1$.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) I e III.

(B) III.

(C) I e II.

(D) II e III.

(E) II.

Q3. Seja $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^3$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} \in M_3(\mathbb{R})$. Sabendo que T possui 3 autovalores distintos e que $(1,1,0)$ é um autovetor de T, qual dos seguintes vetores de $\mathbb{C}^3$ certamente **não é** um autovetor de T?

(A) $(1,1,0) + 4(1,1,0)$

(B) $(1,1,0) + 4i(1,1,0)$

(C) $(1,1,0) + i(1,1,1)$

(D) $3i(1,1,0)$

(E) $(1,1,1) + i(2,2,2)$

Q4. Sabendo que 1 e $-2+i$ são raízes do polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{bmatrix}$ e que o auto-espaço de A associado ao autovalor $-2+i$ é gerado pelo vetor $(2, -3+i, 3-i)$, pode-se afirmar corretamente que uma base para o espaço vetorial formado pelas soluções reais do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ é dada por

(A) $\{e^t(1,0,1),\ e^{-2t}(2\cos t, -3\cos t + 2\,\mathrm{sen}\,t, 3\cos t + 2\,\mathrm{sen}\,t),$
$e^{-2t}(2\,\mathrm{sen}\,t, 3\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t, -3\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t)\}$

(B) $\{e^t(1,1,0),\ e^{-2t}(2\cos t, -3\cos t + 2\,\mathrm{sen}\,t, 3\cos t + 2\,\mathrm{sen}\,t),$
$e^{-2t}(-2\,\mathrm{sen}\,t, 3\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t, -3\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t)\}$

(C) $\{e^t(1,1,0),\ e^{-2t}(2\cos t, -3\cos t - \mathrm{sen}\,t, 3\cos t + \mathrm{sen}\,t),$
$e^{-2t}(2\,\mathrm{sen}\,t, \cos t - 3\,\mathrm{sen}\,t, -\cos t + 3\,\mathrm{sen}\,t)\}$

(D) $\{e^t(1,1,0),\ e^{-2t}(2\cos t, 2\cos t - 3\,\mathrm{sen}\,t, \cos t + \mathrm{sen}\,t),$
$e^{-2t}(2\,\mathrm{sen}\,t, 3\cos t + \mathrm{sen}\,t, 2\cos t - \mathrm{sen}\,t)\}$

(E) $\{e^t(1,0,1),\ e^{-2t}(2\cos t, -3\cos t - 4\,\mathrm{sen}\,t, 3\cos t + 4\,\mathrm{sen}\,t),$
$e^{-2t}(2\,\mathrm{sen}\,t, -2\cos t + 4\,\mathrm{sen}\,t, \cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t)\}$

Q5. Seja U um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, seja $T\colon U \to U$ um operador linear e sejam λ_1, λ_2 e λ_3 autovalores de T dois a dois distintos. Para cada $i = 1, 2, 3$, denote $V_i = \mathrm{Ker}(T - \lambda_i I)$. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $\dim(U) = 4$ e $\dim(V_1) = 2$, então T é simétrico.
II. Se T é simétrico, então $V_1 \subset (V_2^\perp \cap V_3^\perp)$ e $V_2 \subset V_3^\perp$.
III. Se T é diagonalizável, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os únicos autovalores de T e valem as inclusões $V_1 \subset (V_2^\perp \cap V_3^\perp)$ e $V_2 \subset V_3^\perp$, então T é simétrico.

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.
(B) I, apenas.
(C) I e III, apenas.
(D) II, apenas.
(E) II e III, apenas.

Q6. Considere as matrizes $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3+i & -2i \\ -4i & 3-i \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Sabendo que $Q^{-1}AQ$ é uma matriz diagonal, é correto afirmar que a soma dos elementos na segunda coluna de A^{400} é igual a

(A) 2^{201}
(B) $3 \cdot 2^{201}$
(C) 2^{200}
(D) $3 \cdot 2^{200}$
(E) $3 \cdot 2^{203}$

Q7. A dimensão do subespaço vetorial complexo de $\mathbb{C}^5$ gerado pelos vetores

$$(1, 2+i, -1, 0, 1+i),\ (1-i, 3-i, -1+i, 0, 2),\ (1, 1+i, 0, 1-i, 0),$$
$$(2-i, 3+i, 0, 1-3i, 0),\ (1, 2i, 1-i, 1-3i, -2)$$

é igual a

(A) 3
(B) 2
(C) 5
(D) 4
(E) 1

Q8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere as seguintes afirmações sobre a equação

$$-6x^2 + ay^2 - 6z^2 + 2xz = b$$

nas variáveis x, y, z:

I. Se $a < 0$ e $b > 0$, então a equação não possui solução.
II. Se $a < 0$ e $b = 0$, então a equação não possui solução.
III. Se $a > 0$ e $b = 0$, então a equação possui infinitas soluções.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) I e III.
(B) I e II.
(C) I.
(D) II e III.
(E) II.

Q9. Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja $T\colon V \to V$ um operador linear simétrico. Se v e w são vetores de V tais que $v \in \operatorname{Ker}(T - 3I)$, $w \in \operatorname{Ker}(T - 4I)$ e $\|v\| = \|w\| = 2$, então $\|T(v - w)\|$ é igual a

(A) $\sqrt{85}$
(B) $\sqrt{70}$
(C) 20
(D) 10
(E) $\sqrt{30}$

Q10. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual. Se $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é o operador linear simétrico que tem 5 como autovalor e que satisfaz $T(1,2) = (3,6)$, então a soma dos elementos na segunda coluna de $[T]_{\mathsf{can}}$ é

(A) 13/5
(B) 3/5
(C) 11/5
(D) 27/5
(E) −8/5

Q11. Considere as seguintes matrizes

$$L = \begin{bmatrix} 77 & 99 & \pi^2 \\ 99 & e^5 & 55 \\ \pi^2 & 55 & 11 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 7-8i & 99 & 88 \\ 0 & 97+79i & \pi^{10} \\ 0 & 0 & 5-8i \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix},$$

e seja $P \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz que tem $3 - 7i$ e $88 - \pi i$ como autovalores. São diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$

(A) N e P, apenas.
(B) L, M e N, apenas.
(C) L, M, N e P.
(D) L e M, apenas.
(E) L, M e P, apenas.

Q12. A cônica de equação $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 1 = 0$ é

(A) um par de retas paralelas.
(B) uma hipérbole.
(C) uma parábola.
(D) uma elipse.
(E) um par de retas concorrentes.

Q13. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$. Sabendo que $X(t) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + e^{-t})$ é solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$, pode-se afirmar corretamente que o determinante de A é igual a

(A) -1
(B) 2
(C) -2
(D) 1
(E) 0

Q14. Seja $a \in \mathbb{R}$. A cônica de equação $2xy + 3x - y + a = 0$ é um par de retas concorrentes se, e somente se, a for igual a

(A) $-7/3$
(B) $5/3$
(C) $7/2$
(D) $9/2$
(E) $-3/2$

Q15. Em $\mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear cujos autovalores distintos são λ_1, λ_2 e λ_3 e que satisfaz $\mathrm{Ker}(T-\lambda_1 I) = [(1,0,1,1),(2,0,1,0)]$ e $\mathrm{Ker}(T-\lambda_2 I) = [(1,0,-2,1)]$. Considere as seguintes afirmações:

I. T certamente não é simétrico.

II. Se T é simétrico, então existem $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que $\mathrm{Ker}(T-\lambda_3 I) = [(a,b,c,d)]$ com $abcd = 0$.

III. T certamente é diagonalizável, e existem $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que $\mathrm{Ker}(T-\lambda_3 I) = [(a,b,c,d)]$ com $abcd = 0$.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) II.

(B) II e III.

(C) III.

(D) I.

(E) I e III.

Q16. Seja n um inteiro maior do que 1. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.

I. Se A diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, então A é também diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

II. Seja L o operador linear do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ tal que $[L]_{\mathsf{can}} = A$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de L, então $\dim\big(\mathrm{Ker}(L-\lambda I)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(L-\overline{\lambda} I)\big)$.

III. Seja T o operador linear do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = A$. Se A é diagonal e $\mathcal{C}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ em relação ao produto interno usual, então $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.

Está correto o que se afirma em

(A) III, apenas.

(B) I, II e III.

(C) I e III, apenas.

(D) II, apenas.

(E) I e II, apenas.