Nesta prova, adotam-se as seguinte convenções:

- As equações de quádricas e cônicas estão sempre dadas em relação a um sistema de coordenadas $\Sigma = (0, \mathcal{B})$, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal.
- O operador identidade de um espaço vetorial será denotado por I.
- A base canônica de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ será denotada por can.
- Se α é um número complexo, $\overline{\alpha}$ denotará seu conjugado complexo.

Q1. Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja $T\colon V \to V$ um operador linear simétrico. Se v e w são vetores de V tais que $v \in \mathrm{Ker}(T-3I)$, $w \in \mathrm{Ker}(T-4I)$ e $\|v\| = \|w\| = 2$, então $\|T(v-w)\|$ é igual a

(A) 10
(B) 20
(C) $\sqrt{70}$
(D) $\sqrt{30}$
(E) $\sqrt{85}$

Resposta: Como T é um operador linear simétrico, temos que $\langle v, w\rangle = 0$, pois são autovetores associados a autovalores diferentes. Assim

$$\begin{aligned}\langle T(v-w), T(v-w)\rangle &= \langle T(v)-T(w), T(v)-T(w)\rangle = \langle 3v-4w, 3v-4w\rangle \\ &= \langle 3v, 3v\rangle + \langle 4w, 4w\rangle = 9\|v\|^2 + 16w^2 = 36 + 64 = 100\end{aligned}$$

Logo $\|T(v-w)\| = 10$.

Q2. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual. Se $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é o operador linear simétrico que tem 5 como autovalor e que satisfaz $T(1,2) = (3,6)$, então a soma dos elementos na segunda coluna de $[T]_{\mathsf{can}}$ é

(A) 13/5
(B) 27/5
(C) 3/5
(D) 11/5
(E) $-8/5$

Resposta: $(1,2)$ é autovetor associado a 3. Como 5 é autovalor, temos que existe um autovetor associado a 5. Como T é simétrico, esse autovetor dever ser ortogonal a $(1,2)$. Portanto, temos que $((1,2),(2,-1))$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, e $\mathcal{B} = ((\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}))$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Logo

$$[T]_{\mathsf{can}} = [I]_{\mathcal{B}\mathsf{can}}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathsf{can}\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}\mathsf{can}}[T]_{\mathcal{B}}[I]^t_{\mathcal{B}\mathsf{can}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 23 & -4 \\ -4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Logo a soma dos elementos da segunda coluna de $[T]_{\mathsf{can}}$ é $\frac{13}{5}$.

Q3. Seja $a \in \mathbb{R}$. A cônica de equação $2xy + 3x - y + a = 0$ é um par de retas concorrentes se, e somente se, a for igual a

(A) $-3/2$
(B) $-7/3$
(C) $9/2$
(D) $7/2$
(E) $5/3$

Resposta: A partir da equação da cônica construimos a matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e consideramos o operador simétrico $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = A$. O polinômio característico de T é

$$\det \begin{pmatrix} - & 1 \\ 1 & - \end{pmatrix} = t^2 - 1.$$

Assim os autovalores de T são 1 e -1.

$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Logo $\ker(T - I) = [(1, 1)]$.

$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Logo $\ker(T + I) = [(1, -1)]$.

A base ortonormal $\mathcal{B} = ((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}))$ é tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se (x', y') são as coordenadas de (x, y) em relação à base $\mathcal{B}$, temos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{pmatrix}.$$

Assim temos que a expressão da equação da cônica nas coordenadas (x', y') é:

$$x'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' - y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}y' + a = 0,$$

$$(x' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - \frac{1}{2} - (y' - \frac{2}{\sqrt{2}})^2 + 2 + a = 0.$$

Após fazer a mudança de coordenadas $x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y'' = y' - \frac{2}{\sqrt{2}}$. Temos que a equação da cônica fica como

$$x''^2 - y''^2 + \frac{3}{2} + a = 0,$$

que representa duas retas concorrentes se, e somente se, $a = -\frac{3}{2}$

Q4. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica tal que $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Se 4 é um autovalor de A, então a solução $X(t)$ do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (1, 2, 3)$ é dada por

(A) $\left(-1 + 2e^{4t},\ 2e^{4t},\ 1 + 2e^{4t}\right)$
(B) $\left(e^{4t},\ 2e^{4t},\ 3e^{4t}\right)$
(C) $\left(-1 + 2e^{t},\ 2e^{t},\ 1 + 2e^{t}\right)$
(D) $\left(-2e^{t} + 3e^{4t},\ e^{t} + e^{4t},\ 3e^{4t}\right)$
(E) $\left(1,\ 1 + e^{4t},\ -1 + 4e^{4t}\right)$

Resposta: A matriz simétrica A define um operador simétrico $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $[T]_{\mathsf{can}} = A$. Por hipótese temos que $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -1)$ são autovetores de T associados ao autovalor 0. Um elemento de $\ker(T - 4I)$ dever estar em $[(1, -1, 0), (0, 1, -1)]^{\perp}$. Assim temos que $\ker(T - 4I) = [(1, 1, 1)]$. Assim temos que todas as soluções de $X'(t) = AX(t)$ são da forma

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Assim $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_3 \\ -C_1 + C_2 + C_3 \\ -C_2 + C_3 \end{pmatrix}$. Resolvendo o sistema temos que: $C_1 = -1$, $C_2 = -1$ e $C_3 = 2$.

Logo a solução procurada é: $(-1 + 2e^{4t}, 2e^{4t}, 1 + 2e^{4t})$.

Q5. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$. Sabendo que $X(t) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + e^{-t})$ é solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$, pode-se afirmar corretamente que o determinante de A é igual a

(A) -2
(B) 2
(C) 0
(D) -1
(E) 1

Resposta: Por teoria sabemos que as soluções de $X'(t) = AX(t)$ são da forma

$$X(t) = C_1 e^{\alpha t} u_1 + C_2 e^{\beta t} u_2,$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, α, β são os autovalores de A e u_1 e u_2 autovetores associados a α e β respectivamente. Assim temos que

$$X(t) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + e^{-t}) = 1 \cdot e^{2t}(1, 1) + 1 \cdot e^{-t}(-1, 1).$$

Seja $\mathcal{B} = (u_1, u_2) = ((1, 1), (-1, 1))$ e seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = A$. Então temos que

$$\begin{aligned} A &= [T]_{\mathsf{can}} = [I]_{\mathcal{B}\mathsf{can}}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathsf{can}\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}\mathsf{can}}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}\mathsf{can}}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo $\det A = -2$.

Q6. Seja n um inteiro maior do que 1. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.

I. Se A diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, então A é também diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
II. Seja L o operador linear do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ tal que $[L]_{\mathsf{can}} = A$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de L, então $\dim\big(\mathrm{Ker}(L - \lambda I)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(L - \overline{\lambda} I)\big)$.
III. Seja T o operador linear do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = A$. Se A é diagonal e $\mathcal{C}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ em relação ao produto interno usual, então $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.

Está correto o que se afirma em

(A) II, apenas.
(B) III, apenas.
(C) I e II, apenas.
(D) I e III, apenas.
(E) I, II e III.

Resposta: (I) é falsa. Por exemplo a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ mas não sobre $\mathbb{R}$ porque as raizes do polinômio característico não são reais.

(II) é verdadeira. Foi estudado em teoria.

(III) é falsa. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, suponha que $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Seja $\mathcal{B} = ((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}))$. Então, $T(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}) \neq \lambda(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Logo $[T]_{\mathcal{B}}$ não é diagonal.

Q7. Considere as seguintes matrizes

$$L = \begin{bmatrix} 77 & 99 & \pi^2 \\ 99 & e^5 & 55 \\ \pi^2 & 55 & 11 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 7-8i & 99 & 88 \\ 0 & 97+79i & \pi^{10} \\ 0 & 0 & 5-8i \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix},$$

e seja $P \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz que tem $3 - 7i$ e $88 - \pi i$ como autovalores. São diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$

(A) L, M e P, apenas.
(B) L e M, apenas.
(C) L, M e N, apenas.
(D) N e P, apenas.
(E) L, M, N e P.

Resposta: A matriz L é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ por ser simétrica. Portanto, diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

A matriz M é diagonalizável por possuir as três raizes de seu polinômio característico diferentes.

O polinômio característico de N é $\det\begin{pmatrix} 1+i-t & 1 \\ 1 & 1-i-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$. Agora $N - I = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. Agora é fácil comprovar que a dimensão de $\ker(N - I)$ é 1. Assim a multiplicidade algébrica de 1 é dois e a multiplicidade geométria de 1 é um. Portanto N não é diagonalizável.

Como as entradas de P são reais, $3+7i$ e $88+\pi i$ também são autovalores de P. Portanto o polinômio característico de P possui as quatro raízes diferentes. Isso implica que a matriz P é diagonalizável.

Q8. Considere as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3+i & -2i \\ -4i & 3-i \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Sabendo que $Q^{-1}AQ$ é uma matriz diagonal, é correto afirmar que a soma dos elementos na segunda coluna de A^{400} é igual a

(A) 2^{200}
(B) $3 \cdot 2^{200}$
(C) 2^{201}
(D) $3 \cdot 2^{203}$
(E) $3 \cdot 2^{201}$

Resposta: Dado um operador linear $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, sabemos que $[T]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathsf{can}\mathcal{B}}[T]_{\mathsf{can}}[I]_{\mathcal{B}\mathsf{can}}$. Se $\mathcal{B}$ é tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonal, temos que as colunas de $[I]_{\mathcal{B}\mathsf{can}}$ são autovetores de T. Assim temos que as colunas de Q são autovetores de A. De fato

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1-i)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos que $A = Q\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}Q^{-1}$. Assim

$$A^{400} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}^{400}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{200} & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{200} & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix}.$$

Veja que não precisamos fazer o produto das três matrizes pois na segunda igualdade a matriz diagonal é um múltiplo da identidade.

Q9. Seja $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^3$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} \in M_3(\mathbb{R})$. Sabendo que T possui 3 autovalores distintos e que $(1,1,0)$ é um autovetor de T, qual dos seguintes vetores de $\mathbb{C}^3$ certamente **não é** um autovetor de T?

(A) $(1,1,0) + i(1,1,1)$
(B) $(1,1,0) + 4i(1,1,0)$
(C) $3i(1,1,0)$
(D) $(1,1,0) + 4(1,1,0)$
(E) $(1,1,1) + i(2,2,2)$

Resposta: Os vetores em (B),(C),(D),(E) são múltiplos complexos de $(1,1,0)$, portanto são autovetores.

(A) é a resposta correta. Seja $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $T(1,1,0) = \lambda_1(1,1,0)$, ($\lambda_1$ é real pois $[T]_{\mathsf{can}} \in M_3(\mathbb{R})$). Se $v = (1,1,0) + i(1,1,1)$ for um autovetor então $T(v) = \lambda_2 v$ com $\lambda_2 \neq \lambda_1$, por hipótese não sendo v e $(1,1,0)$ LI. Portanto $\lambda_2(1,1,0) + \lambda_2(1,1,1) = Tv = \lambda_1(1,1,0) + iT(1,1,1)$, onde $T(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ (pois $[T]_{\mathsf{can}} \in M_3(\mathbb{R})$). Obtemos portanto o absurdo che a parte real de Tv satisfaz $\lambda_2(1,1,0) = \lambda_1(1,1,0)$ com $\lambda_1 \neq \lambda_1$.

Q10. Sabendo que 1 e $-2+i$ são raízes do polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{bmatrix}$ e que o auto-espaço de A associado ao autovalor $-2+i$ é gerado pelo vetor $(2, -3+i, 3-i)$, pode-se afirmar corretamente que uma base para o espaço vetorial formado pelas soluções reais do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ é dada por

(A) $\{e^t(1,1,0),\ e^{-2t}(2\cos t, -3\cos t - \operatorname{sen} t, 3\cos t + \operatorname{sen} t),$
$e^{-2t}(2\operatorname{sen} t, \cos t - 3\operatorname{sen} t, -\cos t + 3\operatorname{sen} t)\}$

(B) $\{e^t(1,0,1),\ e^{-2t}(2\cos t, -3\cos t + 2\operatorname{sen} t, 3\cos t + 2\operatorname{sen} t),$
$e^{-2t}(2\operatorname{sen} t, 3\cos t - 2\operatorname{sen} t, -3\cos t - 2\operatorname{sen} t)\}$

(C) $\{e^t(1,1,0),\ e^{-2t}(2\cos t, -3\cos t + 2\operatorname{sen} t, 3\cos t + 2\operatorname{sen} t),$
$e^{-2t}(-2\operatorname{sen} t, 3\cos t - 2\operatorname{sen} t, -3\cos t - 2\operatorname{sen} t)\}$

(D) $\{e^t(1,0,1),\ e^{-2t}(2\cos t, -3\cos t - 4\operatorname{sen} t, 3\cos t + 4\operatorname{sen} t),$
$e^{-2t}(2\operatorname{sen} t, -2\cos t + 4\operatorname{sen} t, \cos t - 2\operatorname{sen} t)\}$

(E) $\{e^t(1,1,0),\ e^{-2t}(2\cos t, 2\cos t - 3\operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t),$
$e^{-2t}(2\operatorname{sen} t, 3\cos t + \operatorname{sen} t, 2\cos t - \operatorname{sen} t)\}$

Resposta: (A) é a resposta correta. O espaço das soluções tem dimensão real 3. Precisamos portanto procurar 3 soluções LI. É facil verificar que $(1,1,0)$ é un autovetor de A e portanto $e^t(1,1,0)$ é uma soluão do sistema. Outras duas soluções são dadas pela parte real e pela parte imaginaria da solução complexa associada ao autovalor $-2+i$, (i.e. $e^{(-2+i)t}(2, -3+i, 3-i)$), dadas respectivamente por $e^{-2t}(2\cos t, -3\cos t - \operatorname{sen} t, 3\cos t + \operatorname{sen} t)$ e $e^{-2t}(2\operatorname{sen} t, \cos t - 3\operatorname{sen} t, -\cos t + 3\operatorname{sen} t)$. Agora sabemos pela teoria dos sistemas EDO que este treis soluções são LI, sendo A uma matriz real (alternativamente é simples verificar, collocando $t = 0$, que as tres soluções são LI).

Q11. Seja U um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, seja $T\colon U \to U$ um operador linear e sejam λ_1, λ_2 e λ_3 autovalores de T dois a dois distintos. Para cada $i = 1,2,3$, denote $V_i = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i I)$. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $\dim(U) = 4$ e $\dim(V_1) = 2$, então T é simétrico.
II. Se T é simétrico, então $V_1 \subset (V_2^\perp \cap V_3^\perp)$ e $V_2 \subset V_3^\perp$.
III. Se T é diagonalizável, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os únicos autovalores de T e valem as inclusões $V_1 \subset (V_2^\perp \cap V_3^\perp)$ e $V_2 \subset V_3^\perp$, então T é simétrico.

Está correto o que se afirma em

(A) II e III, apenas.
(B) I, II e III.
(C) I e III, apenas.
(D) II, apenas.
(E) I, apenas.

Resposta: (A) é a resposta correta. Alternativa I é falsa: a trasformação $f(x,y,z,w) = (x, y, 2z, z + 3w)$ é um contra-exemplo. Alternativa II é verdadeira, é consequencia direta do fato que se T é simetrico, então os autoespaços são dois a dois ortogonais. Alternativa III é verdadeira: sendo T diagonalizavel $\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 = \dim U$. As hipóteses que $V_1 \subset (V_2^\perp \cap V_3^\perp)$ e $V_2 \subset V_3^\perp$ implicam que os espaços são dois a dois orthogonais. Seja $\mathcal{B}_j$ uma base ortonormal de V_j, $j = 1,2,3$, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ é uma base orthonormal de U formada por autovetores de T, portanto T é simetrico.

Q12. Em $\mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear cujos autovalores distintos são λ_1, λ_2 e λ_3 e que satisfaz $\operatorname{Ker}(T - \lambda_1 I) = [(1,0,1,1),(2,0,1,0)]$ e $\operatorname{Ker}(T - \lambda_2 I) = [(1,0,-2,1)]$. Considere as seguintes afirmações:

I. T certamente não é simétrico.
II. Se T é simétrico, então existem $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{Ker}(T - \lambda_3 I) = [(a,b,c,d)]$ com $abcd = 0$.

III. T certamente é diagonalizável, e existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\text{Ker}(T - \lambda_3 I) = [(a, b, c, d)]$ com $abcd = 0$.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) II.
(B) II e III.
(C) I.
(D) I e III.
(E) III.

Resposta: (A) é a resposta correta. Observamos primeiro que as hipóteses implicam que T é diagonalizavel. Alternativa I é falsa: no caso en que $\text{Ker}(T - \lambda_3 I) = [(0, 1, 0, 0)]$, os autoespaços seriam dois a dois ortogonais e portanto T seria simetrica. Alternativa II é verdadeira pois se T for simetrica, então os autoespaços seriam dois a dois ortogonais e portanto $\text{Ker}(T - \lambda_3 I) = [(0, 1, 0, 0)]$. Alternativa III é falsa: com efeito $\text{Ker}(T - \lambda_3 I) = [(1, 1, 1, 1)]$ é una possivel opção.

Q13. A cônica de equação $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 1 = 0$ é

(A) uma elipse.
(B) uma parábola.
(C) uma hipérbole.
(D) um par de retas paralelas.
(E) um par de retas concorrentes.

Resposta: (A) é a resposta correta. Observamos que em $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 1 = 0$ não tem termo de primeiro grau, pode-se escrever como segue

$$(x, y) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Observamos que a matriz tem valores proprios $\lambda_1 = 1/2(7 + \sqrt{13})$ e $\lambda_2 = 1/2(7 - \sqrt{13})$, portanto a menos de una troca de coordenadas a equação da conica é

$$\left(1/2(7 + \sqrt{13})\right)(x')^2 + \left(1/2(7 - \sqrt{13})\right)(y')^2 = 1,$$

logo uma elipse.

Q14. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere as seguintes afirmações sobre a equação

$$-6x^2 + ay^2 - 6z^2 + 2xz = b$$

nas variáveis x, y, z:

I. Se $a < 0$ e $b > 0$, então a equação não possui solução.
II. Se $a < 0$ e $b = 0$, então a equação não possui solução.
III. Se $a > 0$ e $b = 0$, então a equação possui infinitas soluções.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) I e III.
(B) II.
(C) II e III.
(D) I e II.

(E) I.

Resposta: (A) é a resposta correta. Observamos que em $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 1 = 0$ não tem termo de primeiro grau, pode-se escrever como segue

$$\begin{pmatrix} x, y, z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

Observamos que a matriz tem valores proprios $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = -5$ e $\lambda_3 = a$, portanto a menos de una troca de coordenadas a equação da conica é

$$-5(x')^2 - 7(y')^2 + a(z')^2 = b.$$

Portanto agora é trivial verificar que stá correto apenas o que se afirma em I e III.

Q15. A dimensão do subespaço vetorial complexo de $\mathbb{C}^5$ gerado pelos vetores

$$(1, 2+i, -1, 0, 1+i),\ (1-i, 3-i, -1+i, 0, 2),\ (1, 1+i, 0, 1-i, 0),$$
$$(2-i, 3+i, 0, 1-3i, 0),\ (1, 2i, 1-i, 1-3i, -2)$$

é igual a

(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 1

Resposta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+i & -1 & 0 & 1+i \\ 1-i & 3-i & -1+i & 0 & 2 \\ 1 & 1+i & 0 & 1-i & 0 \\ 2-i & 3+i & 0 & 1-3i & 0 \\ 1 & 2i & 1-i & 1-3i & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_2 \to L_2 - (1-i)L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - (2-i)L_1 \\ L_5 \to L_5 - L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2+i & -1 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1-i & -1-i \\ 0 & -2+i & 2-i & 1-3i & -3-i \\ 0 & -2+i & 2-i & 1-3i & -3-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_5 \to L_5 - L_4 \\ L_4 \to L_4 + (-2+i)L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2+i & -1 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1-i & -1-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto a dimensão do subespaço é 2.

Q16. Seja n um inteiro maior do que 1 e seja $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o operador linear no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}$ cuja matriz, em relação à base canônica de $\mathbb{C}^n$, é $A \in M_n(\mathbb{C})$. Denote por p_T o polinômio característico de T. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $n = 2$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T tal que $\lambda \notin \mathbb{R}$, então T é necessariamente diagonalizável.
II. Se $A \notin M_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p_T tal que $\alpha \notin \mathbb{R}$, então certamente $p_T(\overline{\alpha}) \neq 0$.
III. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T de multiplicidade algébrica $n-1$, então T será diagonalizável se, e somente se, a dimensão do subespaço complexo $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ de $\mathbb{C}^n$ for igual a $n-1$.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) III.

(B) I e III.

(C) I e II.

(D) II e III.

(E) II.

Resposta: (A) é a resposta correta. Alternativa I é falsa: um contra-exemplo é dado por $T(z, w) = (i(z+w), iw)$. Alternativa II é falsa: um contra-exemplo é dado por $T(z, w) = (iz, -iw)$. Alternativa III é verdadeira: Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T, então existe um autovalor $\mu \neq \lambda$ tal que a dimensão complexa do subespaço complexo $\operatorname{Ker}(T - \mu I)$ de $\mathbb{C}^n$ é menor o igual a 1 (sendo a multiplicidade algébrica de λ $n - 1$) e portanto exatamente 1. Observamos agora que T será diagonalizável se, e somente se, $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}(T - \mu I) + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}(T - \lambda I) = n$ se, e somente se, a dimensão do subespaço complexo $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ de $\mathbb{C}^n$ for igual a $n - 1$.