

Nesta prova, se v_1, \dots, v_n forem vetores de um espaço vetorial V , o subespaço de V gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$ será denotado por $[v_1, \dots, v_n]$. Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V , a projeção ortogonal de um vetor $v \in V$ sobre S , quando existir, será denotada por $\text{proj}_S v$. O operador identidade de V será denotado por I .

A base canônica de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n será denotada por can .

Equações de cônicas são dadas em relação a um sistema de coordenadas de base ortonormal.

O traço de uma matriz quadrada A , isto é, a soma das entradas na diagonal principal de A , será denotado por $\text{tr}(A)$.

Q1. Quantos operadores lineares $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ simétricos, em relação ao produto interno usual de \mathbb{R}^4 , com exatamente 3 autovalores distintos e que satisfazem $T(e_1) = 55e_1$, $T(e_2) = 77e_2$ e $T(e_3) = 99e_3$, em que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^4 , existem?

- (A) 3
- (B) 1
- (C) 4
- (D) 0
- (E) Infinitos.

Q2. Seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que

$$\text{Ker}(T - 2I) = [(1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, -1)]$$

e

$$\text{Ker}(T - 3I) = [(-1, 1, 0, 0), (0, 1, 2, 0)].$$

Se $A = [T]_{\text{can}}$, então a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (0, 3, 4, 0)$ é dada por

- (A) $(e^{2t} + 2e^{3t}, e^{2t}, 2e^{2t} - e^{3t}, e^{2t})$
- (B) $(e^{2t} - e^{3t}, e^{2t} + 2e^{3t}, 2e^{2t} + 2e^{3t}, 0)$
- (C) $(e^{2t} + e^{3t}, e^{2t} - 2e^{3t}, e^{2t} + e^{3t}, 0)$
- (D) $(e^{2t} - e^{3t}, e^{2t} - e^{3t}, -e^{2t} - e^{3t}, 0)$
- (E) $(e^{2t} + 2e^{3t}, e^{2t} - e^{3t}, -e^{2t} - e^{3t}, e^{2t})$

Q3. Seja n um inteiro maior do que um, seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz de T em relação à base canônica de \mathbb{R}^n . Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ todos os r autovalores de T distintos. Considere as seguintes afirmações:

- I. T é diagonalizável se, e somente se, $r = n$.
- II. Se $\lambda_i = 0$, para algum $i = 1, \dots, r$, então $\det(A) = 0$.
- III. Existem vetores linearmente independentes $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ que são autovetores de T .

Está correto apenas o que se afirma em

- (A) I e III.
- (B) I.
- (C) I e II.
- (D) III.
- (E) II e III.

Q4. Considere as afirmações.

- I. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno, e sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} bases ortonormais de V . Então, $|\det([I]_{\mathcal{C}\mathcal{D}})| = 1$.
- II. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz que tem 88 e 177 como raízes de seu polinômio característico. Então, $X(t) = (e^{88t}, e^{177t})$ é, necessariamente, solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$.
- III. Sejam a, b, c, d, p, q números reais. Se a matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ possui dois autovalores reais e positivos, então a curva de equação $ax^2 + by^2 + 2cxy + px + qy + d = 0$ é uma elipse.

Está correto apenas o que se afirma em

- (A) II.
- (B) I e III.
- (C) I.
- (D) II e III.
- (E) I e II.

Q5. Considere as seguintes afirmações sobre um espaço vetorial V de dimensão finita, munido de um produto interno, e um subespaço S de V .

- I. Para quaisquer $v, w \in V$, $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ se, e somente se, $\langle v + w, v - w \rangle = 0$.
- II. Para quaisquer $v \in V$ e $w \in S$, $w = \text{proj}_S v$ se, e somente se, $v - w \in S^\perp$.
- III. Se \mathcal{B} é uma base ortornomal de S e \mathcal{C} é uma base ortonormal de S^\perp , então $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é uma base ortonormal de V .

Está correto o que se afirma em

- (A) I e III, apenas.
- (B) I, II e III.
- (C) II, apenas.
- (D) I, apenas.
- (E) II e III, apenas.

Q6. Considere as afirmações seguintes.

- I. Se $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador simétrico em relação a algum produto interno em \mathbb{R}^n , então $[T]_{\text{can}}$ é uma matriz simétrica.
- II. Seja $A \in M_7(\mathbb{R})$ e seja $T: \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$ é o operador linear complexo tal que $[T]_{\text{can}} = A$. Se $\dim(\text{Ker}(T - (88 + 99i)I)) = 3$, então T é diagonalizável.
- III. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonalizável sobre \mathbb{R} , então existem exatamente n funções $X_1, X_2, \dots, X_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que qualquer solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ pode ser expressa de maneira única como combinação linear de X_1, \dots, X_n .

Está correto o que se afirma em

- (A) I, II e III.
- (B) I e III, apenas.
- (C) II e III, apenas.
- (D) III, apenas.
- (E) I e II, apenas.

Q7. Considere as seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear $T: U \rightarrow V$ entre espaços vetoriais U e V de dimensão finita.

- I. Se S é um subespaço de U tal que $U = \text{Ker}(T) \oplus S$, então $\dim(S) = \dim(V)$.
- II. Se S é um subespaço de U tal que $U = \text{Ker}(T) \oplus S$, então $T(u) = u$, para todo $u \in S$.
- III. T é sobrejetora se, e somente se, $\dim(U) = \dim(V) + \dim(\text{Ker}(T))$.

Está correto o que se afirma em

- (A) I, II e III.
- (B) III, apenas.
- (C) II e III, apenas.
- (D) I, apenas.
- (E) I e II, apenas.

Q8. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o produto interno dado por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx,$$

para todos $p, q \in P_2(\mathbb{R})$, e seja $S = [x]$. Se $S^\perp = [1 + ax^2, x + bx^2]$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, então $3(a - b)$ é igual a

- (A) 0
- (B) -2
- (C) 2
- (D) -1
- (E) 1

Q9. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o produto interno dado por

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2),$$

para todos $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a + bx$ é o polinômio de grau menor ou igual a 1 mais próximo de x^2 , então $a + b$ é igual a

- (A) 16/7
- (B) 52/15
- (C) 12/5
- (D) 5/3
- (E) 3/2

Q10. Sobre as equações

I. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 1 = 0$ e

II. $x^2 + 2xy - 3y^2 - 1 = 0$

está correto afirmar que

- (A) I define o conjunto vazio e II, uma hipérbole.
- (B) I define uma elipse e II, o conjunto vazio.
- (C) I define uma hipérbole e II, uma elipse.
- (D) I e II definem elipses.
- (E) I define uma elipse e II, uma hipérbole.

Q11. Considere \mathbb{R}^3 munido de seu produto interno usual. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear simétrico cujos únicos autovalores são 1 e -1 e tal que $\text{Ker}(T - I) = [(1, 1, 0)]$. Então, $T(1, 3, 2)$ é igual a

- (A) (2, 1, -1)
- (B) (3, 1, -2)
- (C) (3, 2, -1)
- (D) (-3, 2, -2)
- (E) (1, 3, -2)

Q12. Sabendo que $(1, 3 - i)$ é um autovetor da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ associado ao autovalor $1 + i$, pode-se afirmar corretamente que a soma dos elementos na segunda coluna da matriz A^{10} é igual a

- (A) -2^8
- (B) -2^6
- (C) -2^7
- (D) -2^9
- (E) -2^{10}

Q13. Seja $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $P_3(\mathbb{R})$ e $\{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{1 + x, x, -1 + x^2, 2 + x^2 + x^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, -1 + x, 2 + x + x^2\}$$

de $P_3(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Então, a soma dos elementos na primeira linha da matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ é igual a

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 2
- (E) 6

Q14. Sabendo que $(1, 1+2i)$ é um autovetor da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ associado ao autovalor $2 + 2i$, pode-se afirmar corretamente que a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (1, 3)$ é

- (A) $e^{2t}(\cos(2t) - 3\sin(2t), 2\cos(2t) - \sin(2t))$
- (B) $e^{2t}(\cos(2t) + \sin(2t), 3\cos(2t) - \sin(2t))$
- (C) $e^{2t}(\cos(2t) + \sin(2t), \cos(2t) + \sin(2t))$
- (D) $e^{2t}(\cos(2t) + 2\sin(2t), 3\cos(2t) - 2\sin(2t))$
- (E) $e^{2t}(2\cos(2t) - \sin(2t), \cos(2t) - 3\sin(2t))$

Q15. Seja V um espaço vetorial de dimensão 4, munido de um produto interno, seja $u \in V$ um vetor não nulo e seja $P: V \rightarrow V$ o operador linear definido por $P(v) = \text{proj}_{[u]} v$, para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

- I. 0 e 1 são autovalores de P .
- II. P é diagonalizável.
- III. P é simétrico.

Está correto o que se afirma em

- (A) II, apenas.
- (B) I e III, apenas.
- (C) II e III, apenas.
- (D) I, II e III.
- (E) III, apenas.

Q16. Sabendo que $(1, 1)$ e $(3, 2)$ são autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,
pode-se afirmar corretamente que $\text{tr}(A^{200})$ é igual a

- (A) $2 + 2^{199}$
- (B) $1 + 2^{200}$
- (C) 3^{200}
- (D) $4^{200} - 1$
- (E) $4^{200} + 1$