Nesta prova, se $v_1, \ldots, v_n$ forem vetores de um espaço vetorial V, o subespaço de V gerado por $\{v_1, \ldots, v_n\}$ será denotado por $[v_1, \ldots, v_n]$. Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V, a projeção ortogonal de um vetor $v \in V$ sobre S, quando existir, será denotada por $\operatorname{proj}_S v$. O operador identidade de V será denotado por I.

A base canônica de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ será denotada por can.

Equações de cônicas são dadas em relação a um sistema de coordenadas de base ortonormal.

O traço de uma matriz quadrada A, isto é, a soma das entradas na diagonal principal de A, será denotado por $\operatorname{tr}(A)$.

Q1. Considere as afirmações seguintes.

I. Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador simétrico em relação a algum produto interno em $\mathbb{R}^n$, então $[T]_{\mathsf{can}}$ é uma matriz simétrica.

II. Seja $A \in M_7(\mathbb{R})$ e seja $T\colon \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ é o operador linear complexo tal que $[T]_{\mathsf{can}} = A$. Se $\dim\big(\operatorname{Ker}(T - (88 + 99i)I)\big) = 3$, então T é diagonalizável.

III. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então existem exatamente n funções $X_1, X_2, \ldots, X_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tais que qualquer solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ pode ser expressa de maneira única como combinação linear de $X_1, \ldots, X_n$.

Está correto o que se afirma em

(A) I e II, apenas.

(B) I, II e III.

(C) I e III, apenas.

(D) III, apenas.

(E) II e III, apenas.

Q2. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o produto interno dado por

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2),$$

para todos $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a + bx$ é o polinômio de grau menor ou igual a 1 mais próximo de x^2, então $a + b$ é igual a

(A) 12/5
(B) 16/7
(C) 5/3
(D) 3/2
(E) 52/15

Q3. Considere $\mathbb{R}^3$ munido de seu produto interno usual. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear simétrico cujos únicos autovalores são 1 e -1 e tal que $\mathrm{Ker}(T - I) = [(1, 1, 0)]$. Então, $T(1, 3, 2)$ é igual a

(A) $(3, 1, -2)$
(B) $(2, 1, -1)$
(C) $(-3, 2, -2)$
(D) $(1, 3, -2)$
(E) $(3, 2, -1)$

Q4. Considere as seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear $T\colon U \to V$ entre espaços vetoriais U e V de dimensão finita.

I. Se S é um subespaço de U tal que $U = \operatorname{Ker}(T) \oplus S$, então $\dim(S) = \dim(V)$.

II. Se S é um subespaço de U tal que $U = \operatorname{Ker}(T) \oplus S$, então $T(u) = u$, para todo $u \in S$.

III. T é sobrejetora se, e somente se, $\dim(U) = \dim(V) + \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big)$.

Está correto o que se afirma em

(A) I, apenas.

(B) II e III, apenas.

(C) III, apenas.

(D) I, II e III.

(E) I e II, apenas.

Q5. Quantos operadores lineares $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ simétricos, em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^4$, com exatamente 3 autovalores distintos e que satisfazem $T(e_1) = 55e_1$, $T(e_2) = 77e_2$ e $T(e_3) = 99e_3$, em que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$, existem?

(A) 1

(B) 0

(C) 3

(D) 4

(E) Infinitos.

Q6. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que

$$\operatorname{Ker}(T - 2I) = [(1,1,1,1),\ (0,0,1,-1)]$$

e

$$\operatorname{Ker}(T - 3I) = [(-1,1,0,0),\ (0,1,2,0)]\,.$$

Se $A = [T]_{\mathsf{can}}$, então a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (0,3,4,0)$ é dada por

(A) $(e^{2t} + 2e^{3t}, e^{2t} - e^{3t}, -e^{2t} - e^{3t}, e^{2t})$
(B) $(e^{2t} + e^{3t}, e^{2t} - 2e^{3t}, e^{2t} + e^{3t}, 0)$
(C) $\big(e^{2t} - e^{3t},\ e^{2t} + 2e^{3t},\ 2e^{2t} + 2e^{3t},\ 0\big)$
(D) $(e^{2t} - e^{3t}, e^{2t} - e^{3t}, -e^{2t} - e^{3t}, 0)$
(E) $(e^{2t} + 2e^{3t}, e^{2t}, 2e^{2t} - e^{3t}, e^{2t})$

Q7. Sabendo que $(1,1)$ e $(3,2)$ são autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, pode-se afirmar corretamente que $\operatorname{tr}(A^{200})$ é igual a

(A) $4^{200} - 1$
(B) $1 + 2^{200}$
(C) $2 + 2^{199}$
(D) $4^{200} + 1$
(E) 3^{200}

Q8. Sabendo que $(1, 3 - i)$ é um autovetor da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ associado ao autovalor $1 + i$, pode-se afirmar corretamente que a soma dos elementos na segunda coluna da matriz A^{10} é igual a

(A) -2^9
(B) -2^6
(C) -2^7
(D) -2^{10}
(E) -2^8

Q9. Considere as afirmações.

I. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno, e sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases ortonormais de V. Então, $|\det([I]_{\mathcal{CD}})| = 1$.

II. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz que tem 88 e 177 como raízes de seu polinômio característico. Então, $X(t) = (e^{88t}, e^{177t})$ é, necessariamente, solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$.

III. Sejam a, b, c, d, p, q números reais. Se a matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ possui dois autovalores reais e positivos, então a curva de equação $ax^2 + by^2 + 2cxy + px + qy + d = 0$ é uma elipse.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) II.
(B) II e III.
(C) I e II.
(D) I.
(E) I e III.

Q10. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o produto interno dado por

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx,$$

para todos $p, q \in P_2(\mathbb{R})$, e seja $S = [x]$. Se $S^\perp = \big[1 + ax^2,\ x + bx^2\big]$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, então $3(a - b)$ é igual a

(A) 2
(B) -1
(C) 1
(D) -2
(E) 0

Q11. Sabendo que $(1, 1{+}2i)$ é um autovetor da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ associado ao autovalor $2 + 2i$, pode-se afirmar corretamente que a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (1, 3)$ é

(A) $e^{2t}\big(\cos(2t) - 3\operatorname{sen}(2t),\ 2\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)\big)$
(B) $e^{2t}\big(\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t),\ 3\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)\big)$
(C) $e^{2t}\big(2\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t),\ \cos(2t) - 3\operatorname{sen}(2t)\big)$
(D) $e^{2t}\big(\cos(2t) + 2\operatorname{sen}(2t),\ 3\cos(2t) - 2\operatorname{sen}(2t)\big)$
(E) $e^{2t}\big(\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t),\ \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)\big)$

Q12. Considere as seguintes afirmações sobre um espaço vetorial V de dimensão finita, munido de um produto interno, e um subespaço S de V.

I. Para quaisquer $v, w \in V$, $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ se, e somente se, $\langle v+w, v-w \rangle = 0$.

II. Para quaisquer $v \in V$ e $w \in S$, $w = \operatorname{proj}_S v$ se, e somente se, $v - w \in S^\perp$.

III. Se $\mathcal{B}$ é uma base ortornomal de S e $\mathcal{C}$ é uma base ortonormal de $S^\perp$, então $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é uma base ortonormal de V.

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.

(B) I e III, apenas.

(C) II e III, apenas.

(D) I, apenas.

(E) II, apenas.

Q13. Seja V um espaço vetorial de dimensão 4, munido de um produto interno, seja $u \in V$ um vetor não nulo e seja $P\colon V \to V$ o operador linear definido por $P(v) = \operatorname{proj}_{[u]} v$, para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

I. 0 e 1 são autovalores de P.

II. P é diagonalizável.

III. P é simétrico.

Está correto o que se afirma em

(A) II, apenas.

(B) I, II e III.

(C) II e III, apenas.

(D) I e III, apenas.

(E) III, apenas.

Q14. Seja $T\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $P_3(\mathbb{R})$ e $\{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{1 + x,\ x,\ -1 + x^2,\ 2 + x^2 + x^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1,\ -1 + x,\ 2 + x + x^2\}$$

de $P_3(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Então, a soma dos elementos na primeira linha da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ é igual a

(A) 6
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 4

Q15. Sobre as equações

I. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 1 = 0$ e
II. $x^2 + 2xy - 3y^2 - 1 = 0$

está correto afirmar que

(A) I define o conjunto vazio e II, uma hipérbole.
(B) I define uma elipse e II, o conjunto vazio.
(C) I e II definem elipses.
(D) I define uma hipérbole e II, uma elipse.
(E) I define uma elipse e II, uma hipérbole.

Q16. Seja n um inteiro maior do que um, seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^n$. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ todos os r autovalores de T distintos. Considere as seguintes afirmações:

I. T é diagonalizável se, e somente se, $r = n$.

II. Se $\lambda_i = 0$, para algum $i = 1, \ldots, r$, então $\det(A) = 0$.

III. Existem vetores linearmente independentes $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ que são autovetores de T.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) I e III.

(B) II e III.

(C) I e II.

(D) III.

(E) I.