

Nesta prova, se  $u_1, \dots, u_n$  forem vetores de um espaço vetorial  $V$ , o subespaço de  $V$  gerado por  $\{u_1, \dots, u_n\}$  será denotado por  $[u_1, \dots, u_n]$ . Se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $S$  for um subespaço de  $V$ , a projeção ortogonal de um vetor  $v \in V$  sobre  $S$ , quando existir, será denotada por  $\text{proj}_S v$ . O operador identidade de  $V$  será denotado por  $I$ .

A base canônica de  $\mathbb{R}^n$  ou de  $\mathbb{C}^n$  será denotada por  $\text{can}$ .

**Q1.** Considere o subespaço  $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3z - w = 0\}$  de  $\mathbb{R}^4$ . Em relação ao produto interno dado por

$$\langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3 + 4a_4 b_4,$$

um conjunto gerador para  $S^\perp$  é

(A)  $\{(2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$

(B)  $\{(1, -2, 0, 0), (0, 0, 3, -1)\}$

(C)  $\{(2, -1, 0, 1)\}$

(D)  $\{(4, -4, 4, -1)\}$

(E)  $\{(1, -2, 3, -1)\}$

**Q2.** Seja  $\{u_1, u_2, u_3\}$  um conjunto linearmente independente em um espaço vetorial com produto interno e seja  $\{v_1, v_2, v_3\}$  o conjunto ortogonal que se obtém dele pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Considere as seguintes afirmações:

I.  $u_3 - v_3 = \text{proj}_{[u_1, u_2]} u_3$

II.  $u_3 - v_3 = \text{proj}_{[u_1]} u_3 + \text{proj}_{[u_2]} u_3$

III. Se  $u_2 = v_2$ , então  $v_3$  é o vetor nulo.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) III.

(B) II.

(C) II e III.

(D) I.

(E) I e III.

**Q3.** Considere a transformação linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_1(\mathbb{R})$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  e  $\mathcal{C}$  denota uma base de  $P_1(\mathbb{R})$ . Se  $a, b \in \mathbb{R}$  são tais que  $\text{Ker}(T) = [(a, b, 1)]$ , então  $a + b$  é igual a

- (A)  $-8$
- (B)  $7$
- (C)  $-3$
- (D)  $-5$
- (E)  $1$

**Q4.** Considere, em  $P_2(\mathbb{R})$ , o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2),$$

para todos  $f, g \in P_2(\mathbb{R})$ . Se  $a, b \in \mathbb{R}$  são tais que  $a + bx$  é o polinômio de grau  $\leq 1$  que melhor aproxima  $h(x) = x^2 - x$ , então  $a + b$  é igual a

- (A)  $4/3$
- (B)  $1$
- (C)  $-4/3$
- (D)  $2/3$
- (E)  $1/3$

**Q5.** Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica cujo polinômio característico é dado por  $p_A(x) = -x(x - 4)(x + 16)$ . Seja  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é igual a  $A$ , e suponha que  $\text{Ker}(T) = [(1, 2, 1)]$  e  $\text{Ker}(T - 4I) = [(1, -1, 1)]$ . Nessas condições, uma solução do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  é

- (A)  $X(t) = (e^t, e^{4t}, -e^{-16t})$
- (B)  $X(t) = (e^{-16t}, 0, -e^{-16t})$
- (C)  $X(t) = (0, e^{-16t}, -e^{-16t})$
- (D)  $X(t) = (e^{16t}, 2e^{16t}, e^{16t})$
- (E)  $X(t) = (e^t, 2e^{4t}, e^{-16t})$

**Q6.** Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear com  $[T]_{\mathcal{B}, \text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ , em que  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ . Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , se  $c, d \in \mathbb{R}$  são tais que  $T(a, b) = (c, d)$ , então  $c + d$  é igual a

- (A)  $-3a - b$
- (B)  $-7a + 3b$
- (C)  $-2a + 5b$
- (D)  $4a - 4b$
- (E)  $-3a + 3b$

**Q7.** Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Considere as seguintes afirmações sobre o operador linear

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } [T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 5 & \alpha - 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- I.  $T$  é inversível.
- II. 2 é um autovalor de  $T$  com multiplicidade geométrica igual a 1.
- III.  $T$  é diagonalizável se, e somente se,  $\alpha = 2$ .

Está correto o que se afirma em

- (A) II, apenas.
- (B) II e III, apenas.
- (C) I e II, apenas.
- (D) I, apenas.
- (E) I, II e III.

**Q8.** Seja  $T: \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$  um operador linear no espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^5$  cuja matriz  $A = [T]_{\text{can}}$  tenha entradas reais. Suponha que 1 e  $3i$  sejam autovalores de  $T$  e que  $\text{Ker}(T - 3iI)$  seja um subespaço complexo de  $\mathbb{C}^5$  de dimensão igual a 2. Considere as seguintes afirmações:

- I.  $T$  é diagonalizável.
- II. O polinômio característico de  $T$  é  $p_T(x) = -(x - 1)(x^2 + 9)^2$ .
- III.  $\det(A) = 9$ .

Está correto o que se afirma em

- (A) I, II e III.
- (B) I e II, apenas.
- (C) I e III, apenas.
- (D) II, apenas.
- (E) II e III, apenas.

**Q9.** Considere os operadores  $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tais que  $[F]_{\mathcal{C}, \text{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e

$[G]_{\text{can}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , em que  $\mathcal{C} = \{(1, 1), (0, 1)\}$ . Se  $a, b \in \mathbb{R}$  são tais que  $(G \circ F)(-3, 2) = (a, b)$ , então  $a + b$  é igual a

- (A)  $-1$
- (B)  $-11$
- (C)  $20$
- (D)  $11$
- (E)  $29$

**Q10.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Assinale a alternativa que contém uma afirmação

correta sobre a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b^2 & a \end{bmatrix}$ .

- (A) Se  $a = 1$ , então  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ , qualquer que seja  $b$ .
- (B) Se  $a = 2$ , então  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ , qualquer que seja  $b$ .
- (C)  $A$  não é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ , quaisquer que sejam  $a$  e  $b$ .
- (D) Se  $b \neq 0$ , então  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ , qualquer que seja  $a$ .
- (E) Se  $b \neq 1$ , então  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ , qualquer que seja  $a$ .

**Q11.** Se  $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  é o operador linear do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^2$  tal que  $[T]_{\text{can}} \in M_2(\mathbb{R})$  e  $T(1, 2i) = (1 + i)(1, 2i)$ , então  $T(-3, 2)$  é igual a

- (A)  $(1, 6)$
- (B)  $(2, -2)$
- (C)  $(16, 4)$
- (D)  $(-2, 8)$
- (E)  $(0, -4)$

**Q12.** Seja  $T: P_6(\mathbb{R}) \rightarrow P_6(\mathbb{R})$  o operador linear definido por  $T(p(x)) = x^2 p''(x)$ , para todo  $p(x) \in P_6(\mathbb{R})$ . Considere as seguintes afirmações:

- I. O operador  $T$  é diagonalizável.
- II. A soma dos autovalores de  $T$  é 70.
- III. O operador  $T$  é inversível.

Está correto o que se afirma em

- (A) I, II e III.
- (B) II, apenas.
- (C) I e III, apenas.
- (D) I e II, apenas.
- (E) II e III, apenas.

**Q13.** Suponha que  $(1, i)$  seja um autovetor de  $A \in M_2(\mathbb{C})$  associado ao autovalor  $i$  e que  $(i, 0)$  seja um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $-i$ .

Se  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  são tais que  $A^{27} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , então  $a + b - c - d$  é igual a

- (A)  $2 - 2i$
- (B)  $-1$
- (C)  $-3 + 2i$
- (D)  $-2 + 2i$
- (E)  $3 - 2i$

**Q14.** Sabendo que  $(1, 1)$  e  $(3, 2)$  são autovetores da matriz  $A \in M_2(\mathbb{R})$  associados, respectivamente, aos autovalores 3 e 4, se  $X(t) = (x(t), y(t))$  é a solução do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  satisfazendo  $X(0) = (4, 3)$ , então  $x(1) + y(1)$  é igual a

- (A)  $3e^3 + 4e^4$
- (B)  $2e^3 + 5e^4$
- (C)  $3e^3 - 5e^4$
- (D)  $5e^3 - 2e^4$
- (E)  $5e^3 + 2e^4$

**Q15.** Se  $A = \begin{bmatrix} -5i & -6i \\ 4i & 5i \end{bmatrix}$ , então  $A^{30}$  é igual a

(A)  $\begin{bmatrix} 5^{30} & 6^{30} \\ 4^{30} & 5^{30} \end{bmatrix}$

(B)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(D)  $\begin{bmatrix} 4^{30} & 0 \\ 0 & 5^{30} \end{bmatrix}$

(E)  $\begin{bmatrix} 4^{30}i & -i \\ 1 & 5^{30}i \end{bmatrix}$

**Q16.** Fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal, sobre a cônica de equação  $\alpha x^2 + 4xy - 3x = 10$ , em que  $\alpha \in \mathbb{R}$ , é correto afirmar que ela é

(A) um par de retas paralelas, qualquer que seja  $\alpha$ .

(B) uma parábola, qualquer que seja  $\alpha$ .

(C) uma hipérbole, qualquer que seja  $\alpha$ .

(D) um par de retas concorrentes, qualquer que seja  $\alpha$ .

(E) uma hipérbole se  $\alpha > 0$ , e uma elipse se  $\alpha \leq 0$ .