Nesta prova, se $u_1, \dots, u_n$ forem vetores de um espaço vetorial V, o subespaço de V gerado por $\{u_1, \dots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \dots, u_n]$. Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V, a projeção ortogonal de um vetor $v \in V$ sobre S, quando existir, será denotada por $\operatorname{proj}_S v$. O operador identidade de V será denotado por I.

A base canônica de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ será denotada por can.

Q1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa que contém uma afirmação correta sobre a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b^2 & a \end{bmatrix}$.

(A) Se $b \neq 0$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, qualquer que seja a.

(B) A não é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, quaisquer que sejam a e b.

(C) Se $a = 1$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, qualquer que seja b.

(D) Se $a = 2$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, qualquer que seja b.

(E) Se $b \neq 1$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, qualquer que seja a.

Q2. Considere a transformação linear $T \colon \mathbb{R}^3 \to P_1(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B} = \big\{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\big\}$ e $\mathcal{C}$ denota uma base de $P_1(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $\operatorname{Ker}(T) = \big[(a, b, 1)\big]$, então $a + b$ é igual a

(A) -8

(B) -3

(C) 1

(D) 7

(E) -5

Q3. Suponha que $(1, i)$ seja um autovetor de $A \in M_2(\mathbb{C})$ associado ao autovalor i e que $(i, 0)$ seja um autovetor de A associado ao autovalor $-i$. Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $A^{27} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $a + b - c - d$ é igual a

(A) $-3 + 2i$
(B) -1
(C) $-2 + 2i$
(D) $2 - 2i$
(E) $3 - 2i$

Q4. Considere os operadores $F, G \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $[F]_{\mathcal{C},\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $[G]_{\mathsf{can},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{C} = \big\{(1, 1), (0, 1)\big\}$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $(G \circ F)(-3, 2) = (a, b)$, então $a + b$ é igual a

(A) 20
(B) 11
(C) 29
(D) -11
(E) -1

Q5. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2),$$

para todos $f, g \in P_2(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a + bx$ é o polinômio de grau ≤ 1 que melhor aproxima $h(x) = x^2 - x$, então $a + b$ é igual a

(A) $4/3$
(B) 1
(C) $1/3$
(D) $2/3$
(E) $-4/3$

Q6. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica cujo polinômio característico é dado por $p_A(x) = -x(x-4)(x+16)$. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é igual a A, e suponha que $\mathrm{Ker}(T) = \big[(1,2,1)\big]$ e $\mathrm{Ker}(T-4I) = \big[(1,-1,1)\big]$. Nessas condições, uma solução do sistema de equações diferencias $X'(t) = AX(t)$ é

(A) $X(t) = (e^{t}, 2e^{4t}, e^{-16t})$
(B) $X(t) = (e^{t}, e^{4t}, -e^{-16t})$
(C) $X(t) = (e^{-16t}, 0, -e^{-16t})$
(D) $X(t) = (0, e^{-16t}, -e^{-16t})$
(E) $X(t) = (e^{16t}, 2e^{16t}, e^{16t})$

Q7. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com $[T]_{\mathcal{B},\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{B} = \big\{(1,1),(-1,1)\big\}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $T(a,b) = (c,d)$, então $c+d$ é igual a

(A) $4a - 4b$
(B) $-3a - b$
(C) $-7a + 3b$
(D) $-3a + 3b$
(E) $-2a + 5b$

Q8. Seja $T\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ um operador linear no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^5$ cuja matriz $A = [T]_{\mathsf{can}}$ tenha entradas reais. Suponha que 1 e $3i$ sejam autovalores de T e que $\operatorname{Ker}(T - 3iI)$ seja um subespaço complexo de $\mathbb{C}^5$ de dimensão igual a 2. Considere as seguintes afirmações:

I. T é diagonalizável.
II. O polinômio característico de T é $p_T(x) = -(x-1)(x^2+9)^2$.
III. $\det(A) = 9$.

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.
(B) II e III, apenas.
(C) II, apenas.
(D) I e III, apenas.
(E) I e II, apenas.

Q9. Seja $T\colon P_6(\mathbb{R}) \to P_6(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $T\big(p(x)\big) = x^2 p''(x)$, para todo $p(x) \in P_6(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

I. O operador T é diagonalizável.
II. A soma dos autovalores de T é 70.
III. O operador T é inversível.

Está correto o que se afirma em

(A) II e III, apenas.
(B) II, apenas.
(C) I e II, apenas.
(D) I, II e III.
(E) I e III, apenas.

Q10. Fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, sobre a cônica de equação $\alpha x^2 + 4xy - 3x = 10$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que ela é

(A) um par de retas paralelas, qualquer que seja α.

(B) uma hipérbole, qualquer que seja α.

(C) um par de retas concorrentes, qualquer que seja α.

(D) uma parábola, qualquer que seja α.

(E) uma hipérbole se $\alpha > 0$, e uma elipse se $\alpha \leq 0$.

Q11. Se $A = \begin{bmatrix} -5i & -6i \\ 4i & 5i \end{bmatrix}$, então A^{30} é igual a

(A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 4^{30}i & -i \\ 1 & 5^{30}i \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 4^{30} & 0 \\ 0 & 5^{30} \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 5^{30} & 6^{30} \\ 4^{30} & 5^{30} \end{bmatrix}$

Q12. Sabendo que $(1,1)$ e $(3,2)$ são autovetores da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ associados, respectivamente, aos autovalores 3 e 4, se $X(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ é a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo $X(0) = (4,3)$, então $x(1) + y(1)$ é igual a

(A) $5e^3 + 2e^4$
(B) $3e^3 - 5e^4$
(C) $5e^3 - 2e^4$
(D) $2e^3 + 5e^4$
(E) $3e^3 + 4e^4$

Q13. Considere o subespaço $S = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3z - w = 0\big\}$ de $\mathbb{R}^4$. Em relação ao produto interno dado por

$$\big\langle (a_1,a_2,a_3,a_4),(b_1,b_2,b_3,b_4)\big\rangle = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3 + 4a_4b_4,$$

um conjunto gerador para $S^\perp$ é

(A) $\big\{(1,-2,0,0),(0,0,3,-1)\big\}$
(B) $\big\{(2,1,0,0),(-3,0,1,0),(1,0,0,1)\big\}$
(C) $\big\{(4,-4,4,-1)\big\}$
(D) $\big\{(1,-2,3,-1)\big\}$
(E) $\big\{(2,-1,0,1)\big\}$

Q14. Se $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ é o operador linear do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} \in M_2(\mathbb{R})$ e $T(1,2i) = (1+i)(1,2i)$, então $T(-3,2)$ é igual a

(A) $(0,-4)$
(B) $(2,-2)$
(C) $(16,4)$
(D) $(1,6)$
(E) $(-2,8)$

Q15. Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ um conjunto linearmente independente em um espaço vetorial com produto interno e seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ o conjunto ortogonal que se obtém dele pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Considere as seguintes afirmações:

I. $u_3 - v_3 = \operatorname{proj}_{[u_1,u_2]} u_3$

II. $u_3 - v_3 = \operatorname{proj}_{[u_1]} u_3 + \operatorname{proj}_{[u_2]} u_3$

III. Se $u_2 = v_2$, então v_3 é o vetor nulo.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) III.

(B) II.

(C) I.

(D) II e III.

(E) I e III.

Q16. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações sobre o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 5 & \alpha - 2 & 1 \end{bmatrix}$.

I. T é inversível.

II. 2 é um autovalor de T com multiplicidade geométrica igual a 1.

III. T é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = 2$.

Está correto o que se afirma em

(A) I e II, apenas.

(B) I, II e III.

(C) I, apenas.

(D) II e III, apenas.

(E) II, apenas.