

Nesta prova, se u_1, \dots, u_n forem vetores de um espaço vetorial V , o subespaço de V gerado por $\{u_1, \dots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \dots, u_n]$. Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V , a projeção ortogonal de um vetor $v \in V$ sobre S , quando existir, será denotada por $\text{proj}_S v$. O operador identidade de V será denotado por I .

A base canônica de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n será denotada por can .

Q1. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2),$$

para todos $f, g \in P_2(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a + bx$ é o polinômio de grau ≤ 1 que melhor aproxima $h(x) = x^2 - x$, então $a + b$ é igual a

- (A) $1/3$
- (B) $4/3$
- (C) $-4/3$
- (D) $2/3$
- (E) 1

Q2. Suponha que $(1, i)$ seja um autovetor de $A \in M_2(\mathbb{C})$ associado ao autovalor i e que $(i, 0)$ seja um autovetor de A associado ao autovalor $-i$.

Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $A^{27} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $a + b - c - d$ é igual a

- (A) -1
- (B) $-3 + 2i$
- (C) $-2 + 2i$
- (D) $3 - 2i$
- (E) $2 - 2i$

Q3. Se $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é o operador linear do espaço vetorial complexo \mathbb{C}^2 tal que $[T]_{\text{can}} \in M_2(\mathbb{R})$ e $T(1, 2i) = (1 + i)(1, 2i)$, então $T(-3, 2)$ é igual a

- (A) $(1, 6)$
- (B) $(-2, 8)$
- (C) $(2, -2)$
- (D) $(0, -4)$
- (E) $(16, 4)$

Q4. Considere o subespaço $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3z - w = 0\}$ de \mathbb{R}^4 . Em relação ao produto interno dado por

$$\langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \rangle = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3 + 4a_4b_4,$$

um conjunto gerador para S^\perp é

- (A) $\{(1, -2, 3, -1)\}$
- (B) $\{(1, -2, 0, 0), (0, 0, 3, -1)\}$
- (C) $\{(2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$
- (D) $\{(4, -4, 4, -1)\}$
- (E) $\{(2, -1, 0, 1)\}$

Q5. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear com $[T]_{\mathcal{B}, \text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $T(a, b) = (c, d)$, então $c + d$ é igual a

- (A) $4a - 4b$
- (B) $-3a - b$
- (C) $-7a + 3b$
- (D) $-2a + 5b$
- (E) $-3a + 3b$

Q6. Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ um conjunto linearmente independente em um espaço vetorial com produto interno e seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ o conjunto ortogonal que se obtém dele pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Considere as seguintes afirmações:

- I. $u_3 - v_3 = \text{proj}_{[u_1, u_2]} u_3$
- II. $u_3 - v_3 = \text{proj}_{[u_1]} u_3 + \text{proj}_{[u_2]} u_3$
- III. Se $u_2 = v_2$, então v_3 é o vetor nulo.

Está correto apenas o que se afirma em

- (A) I e III.
- (B) III.
- (C) II e III.
- (D) II.
- (E) I.

Q7. Se $A = \begin{bmatrix} -5i & -6i \\ 4i & 5i \end{bmatrix}$, então A^{30} é igual a

- (A) $\begin{bmatrix} 4^{30}i & -i \\ 1 & 5^{30}i \end{bmatrix}$
- (B) $\begin{bmatrix} 5^{30} & 6^{30} \\ 4^{30} & 5^{30} \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (D) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- (E) $\begin{bmatrix} 4^{30} & 0 \\ 0 & 5^{30} \end{bmatrix}$

Q8. Seja $T: P_6(\mathbb{R}) \rightarrow P_6(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $T(p(x)) = x^2 p''(x)$, para todo $p(x) \in P_6(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

- I. O operador T é diagonalizável.
- II. A soma dos autovalores de T é 70.
- III. O operador T é inversível.

Está correto o que se afirma em

- (A) II, apenas.
- (B) I e II, apenas.
- (C) I e III, apenas.
- (D) I, II e III.
- (E) II e III, apenas.

Q9. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica cujo polinômio característico é dado por $p_A(x) = -x(x - 4)(x + 16)$. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é igual a A , e suponha que $\text{Ker}(T) = [(1, 2, 1)]$ e $\text{Ker}(T - 4I) = [(1, -1, 1)]$. Nessas condições, uma solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ é

- (A) $X(t) = (e^t, e^{4t}, -e^{-16t})$
- (B) $X(t) = (e^{-16t}, 0, -e^{-16t})$
- (C) $X(t) = (e^t, 2e^{4t}, e^{-16t})$
- (D) $X(t) = (e^{16t}, 2e^{16t}, e^{16t})$
- (E) $X(t) = (0, e^{-16t}, -e^{-16t})$

Q10. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações sobre o operador linear

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } [T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 5 & \alpha - 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- I. T é inversível.
- II. 2 é um autovalor de T com multiplicidade geométrica igual a 1.
- III. T é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = 2$.

Está correto o que se afirma em

- (A) II, apenas.
- (B) I e II, apenas.
- (C) II e III, apenas.
- (D) I, apenas.
- (E) I, II e III.

Q11. Considere os operadores $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $[F]_{\mathcal{C}, \text{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e $[G]_{\text{can}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{C} = \{(1, 1), (0, 1)\}$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $(G \circ F)(-3, 2) = (a, b)$, então $a + b$ é igual a

- (A) 11
- (B) 29
- (C) -1
- (D) 20
- (E) -11

Q12. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e \mathcal{C} denota uma base de $P_1(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $\text{Ker}(T) = [(a, b, 1)]$, então $a + b$ é igual a

- (A) 1
- (B) -3
- (C) 7
- (D) -5
- (E) -8

Q13. Sabendo que $(1, 1)$ e $(3, 2)$ são autovetores da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ associados, respectivamente, aos autovalores 3 e 4, se $X(t) = (x(t), y(t))$ é a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo $X(0) = (4, 3)$, então $x(1) + y(1)$ é igual a

- (A) $3e^3 + 4e^4$
- (B) $3e^3 - 5e^4$
- (C) $5e^3 + 2e^4$
- (D) $5e^3 - 2e^4$
- (E) $2e^3 + 5e^4$

Q14. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa que contém uma afirmação

correta sobre a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b^2 & a \end{bmatrix}$.

- (A) Se $a = 2$, então A é diagonalizável sobre \mathbb{R} , qualquer que seja b .
- (B) Se $b \neq 0$, então A é diagonalizável sobre \mathbb{C} , qualquer que seja a .
- (C) A não é diagonalizável sobre \mathbb{C} , quaisquer que sejam a e b .
- (D) Se $b \neq 1$, então A é diagonalizável sobre \mathbb{C} , qualquer que seja a .
- (E) Se $a = 1$, então A é diagonalizável sobre \mathbb{R} , qualquer que seja b .

Q15. Seja $T: \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$ um operador linear no espaço vetorial complexo \mathbb{C}^5 cuja matriz $A = [T]_{\text{can}}$ tenha entradas reais. Suponha que 1 e $3i$ sejam autovalores de T e que $\text{Ker}(T - 3iI)$ seja um subespaço complexo de \mathbb{C}^5 de dimensão igual a 2. Considere as seguintes afirmações:

- I. T é diagonalizável.
- II. O polinômio característico de T é $p_T(x) = -(x - 1)(x^2 + 9)^2$.
- III. $\det(A) = 9$.

Está correto o que se afirma em

- (A) I, II e III.
- (B) II, apenas.
- (C) II e III, apenas.
- (D) I e II, apenas.
- (E) I e III, apenas.

Q16. Fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com \mathcal{B} uma base ortonormal, sobre a cônica de equação $\alpha x^2 + 4xy - 3x = 10$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que ela é

- (A) uma hipérbole se $\alpha > 0$, e uma elipse se $\alpha \leq 0$.
- (B) uma hipérbole, qualquer que seja α .
- (C) um par de retas paralelas, qualquer que seja α .
- (D) um par de retas concorrentes, qualquer que seja α .
- (E) uma parábola, qualquer que seja α .