Nesta prova, se $u_1, \dots, u_n$ forem vetores de um espaço vetorial V, o subespaço de V gerado por $\{u_1, \dots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \dots, u_n]$. Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V, a projeção ortogonal de um vetor $v \in V$ sobre S, quando existir, será denotada por $\operatorname{proj}_S v$. O operador identidade de V será denotado por I.

A base canônica de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ será denotada por can.

Q1. Sabendo que $(1,1)$ e $(3,2)$ são autovetores da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ associados, respectivamente, aos autovalores 3 e 4, se $X(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ é a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo $X(0) = (4,3)$, então $x(1) + y(1)$ é igual a

(A) $3e^3 - 5e^4$
(B) $3e^3 + 4e^4$
(C) $5e^3 + 2e^4$
(D) $5e^3 - 2e^4$
(E) $2e^3 + 5e^4$

Q2. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica cujo polinômio característico é dado por $p_A(x) = -x(x-4)(x+16)$. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é igual a A, e suponha que $\operatorname{Ker}(T) = \big[(1,2,1)\big]$ e $\operatorname{Ker}(T - 4I) = \big[(1,-1,1)\big]$. Nessas condições, uma solução do sistema de equações diferencias $X'(t) = AX(t)$ é

(A) $X(t) = (e^t, 2e^{4t}, e^{-16t})$
(B) $X(t) = (e^{-16t}, 0, -e^{-16t})$
(C) $X(t) = (0, e^{-16t}, -e^{-16t})$
(D) $X(t) = (e^t, e^{4t}, -e^{-16t})$
(E) $X(t) = (e^{16t}, 2e^{16t}, e^{16t})$

Q3. Considere os operadores $F, G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $[F]_{\mathcal{C},\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $[G]_{\mathsf{can},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{C} = \{(1,1),(0,1)\}$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $(G \circ F)(-3,2) = (a,b)$, então $a + b$ é igual a

(A) 20
(B) -1
(C) 11
(D) -11
(E) 29

Q4. Seja $T\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ um operador linear no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^5$ cuja matriz $A = [T]_{\mathsf{can}}$ tenha entradas reais. Suponha que 1 e $3i$ sejam autovalores de T e que $\mathrm{Ker}(T - 3iI)$ seja um subespaço complexo de $\mathbb{C}^5$ de dimensão igual a 2. Considere as seguintes afirmações:

I. T é diagonalizável.
II. O polinômio característico de T é $p_T(x) = -(x-1)(x^2+9)^2$.
III. $\det(A) = 9$.

Está correto o que se afirma em

(A) II, apenas.
(B) I e II, apenas.
(C) II e III, apenas.
(D) I e III, apenas.
(E) I, II e III.

Q5. Considere o subespaço $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3z - w = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$. Em relação ao produto interno dado por

$$\big\langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \big\rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3 + 4a_4 b_4,$$

um conjunto gerador para $S^\perp$ é

(A) $\{(1, -2, 0, 0), (0, 0, 3, -1)\}$
(B) $\{(2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$
(C) $\{(2, -1, 0, 1)\}$
(D) $\{(4, -4, 4, -1)\}$
(E) $\{(1, -2, 3, -1)\}$

Q6. Suponha que $(1, i)$ seja um autovetor de $A \in M_2(\mathbb{C})$ associado ao autovalor i e que $(i, 0)$ seja um autovetor de A associado ao autovalor $-i$. Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $A^{27} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $a + b - c - d$ é igual a

(A) $2 - 2i$
(B) $-2 + 2i$
(C) $-3 + 2i$
(D) $3 - 2i$
(E) -1

Q7. Se $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ é o operador linear do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} \in M_2(\mathbb{R})$ e $T(1, 2i) = (1 + i)(1, 2i)$, então $T(-3, 2)$ é igual a

(A) $(16, 4)$
(B) $(-2, 8)$
(C) $(2, -2)$
(D) $(0, -4)$
(E) $(1, 6)$

Q8. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com $[T]_{\mathcal{B},\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{B} = \big\{(1,1),(-1,1)\big\}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $T(a,b) = (c,d)$, então $c + d$ é igual a

(A) $-3a - b$
(B) $-2a + 5b$
(C) $4a - 4b$
(D) $-3a + 3b$
(E) $-7a + 3b$

Q9. Fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, sobre a cônica de equação $\alpha x^2 + 4xy - 3x = 10$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que ela é

(A) um par de retas paralelas, qualquer que seja α.
(B) uma parábola, qualquer que seja α.
(C) uma hipérbole se $\alpha > 0$, e uma elipse se $\alpha \leq 0$.
(D) uma hipérbole, qualquer que seja α.
(E) um par de retas concorrentes, qualquer que seja α.

Q10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa que contém uma afirmação correta sobre a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b^2 & a \end{bmatrix}$.

(A) Se $b \neq 1$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, qualquer que seja a.
(B) Se $a = 2$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, qualquer que seja b.
(C) A não é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, quaisquer que sejam a e b.
(D) Se $b \neq 0$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, qualquer que seja a.
(E) Se $a = 1$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, qualquer que seja b.

Q11. Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to P_1(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\mathcal{C}$ denota uma base de $P_1(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $\mathrm{Ker}(T) = [(a,b,1)]$, então $a+b$ é igual a

(A) 7
(B) 1
(C) -3
(D) -8
(E) -5

Q12. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2),$$

para todos $f, g \in P_2(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a + bx$ é o polinômio de grau ≤ 1 que melhor aproxima $h(x) = x^2 - x$, então $a+b$ é igual a

(A) $4/3$
(B) $2/3$
(C) $-4/3$
(D) $1/3$
(E) 1

Q13. Seja $T\colon P_6(\mathbb{R}) \to P_6(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $T\big(p(x)\big) = x^2 p''(x)$, para todo $p(x) \in P_6(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

I. O operador T é diagonalizável.
II. A soma dos autovalores de T é 70.
III. O operador T é inversível.

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.
(B) I e III, apenas.
(C) II, apenas.
(D) II e III, apenas.
(E) I e II, apenas.

Q14. Se $A = \begin{bmatrix} -5i & -6i \\ 4i & 5i \end{bmatrix}$, então A^{30} é igual a

(A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 5^{30} & 6^{30} \\ 4^{30} & 5^{30} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 4^{30} & 0 \\ 0 & 5^{30} \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 4^{30}i & -i \\ 1 & 5^{30}i \end{bmatrix}$

Q15. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações sobre o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 5 & \alpha - 2 & 1 \end{bmatrix}$.

I. T é inversível.
II. 2 é um autovalor de T com multiplicidade geométrica igual a 1.
III. T é diagonalizável se, e somente se, $\alpha = 2$.

Está correto o que se afirma em

(A) II e III, apenas.
(B) I, II e III.
(C) II, apenas.
(D) I, apenas.
(E) I e II, apenas.

Q16. Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ um conjunto linearmente independente em um espaço vetorial com produto interno e seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ o conjunto ortogonal que se obtém dele pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Considere as seguintes afirmações:

I. $u_3 - v_3 = \mathrm{proj}_{[u_1, u_2]}\, u_3$
II. $u_3 - v_3 = \mathrm{proj}_{[u_1]}\, u_3 + \mathrm{proj}_{[u_2]}\, u_3$
III. Se $u_2 = v_2$, então v_3 é o vetor nulo.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) II e III.
(B) I.
(C) I e III.
(D) III.
(E) II.