Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

[A] para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$.

[B] para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.

→ [C] para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$.

[D] para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^{\perp}$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.

[E] se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \operatorname{proj}_{e_1} x + \operatorname{proj}_{e_2} x + \cdots + \operatorname{proj}_{e_n} x$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

[A] n é par.

[B] T é sobrejetora.

[C] T é injetora.

→ [D] $\operatorname{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.

[E] $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = \dim(\operatorname{Im}(T))$.

Teste 3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\operatorname{Im}(T) \subset \operatorname{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$;

(II) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = \dim(\operatorname{Im}(T))$;

(III) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[C] todas as afirmações são falsas.

[D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

→ [E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

dim Im(T) ≤ dim Ker(T). e dim Ker(T) + dim Im(T) = 3. Logo, não pode ocorrer dim Im(T) = 2 (nem dim Im(T) = 3). Dado que ~~T~~ $T \neq 0$, dim Im(T) ≠ 0.
Logo, dim Im(T) = 1.
Também não pode ocorrer dim Ker(T) = dim Im(T), do contrário teríamos 2 dim Ker(T) = 3.
∴ Resposta E.

---

① C é falsa. De fato, $\{0\} \subset E$, mas $\{0\}^{\perp} = E \not\subset \{0\} = E^{\perp}$ #

---

② $x \in \operatorname{Im}(T) \Rightarrow (\exists y \in V)\ x = T(y)$. Logo, $T(x) = T(T(y)) = (T \circ T)(y) = T(y) = x$.
∴ $\operatorname{Im}(T) \subset \{x \in V : T(x) = x\}$. Também, se $x \in V$ e $x = T(x)$, então $x \in \operatorname{Im}(T)$.
Logo, $\{x \in V : T(x) = x\} \subset \operatorname{Im}(T)$. ∴ vale a igualdade dos conjuntos # D.

Teste 4 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x,z\rangle = \langle y,z\rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x,y\rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[B] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
⟹ [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
[D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
[E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

(I) é V, pois $\langle x-y, z\rangle = \langle x,z\rangle - \langle y,z\rangle = 0$, $(\forall z \in S)$. Logo, $x-y \in S^{\perp}$.

(II) é F. Considere $\mathbb{R}^2$ com $\langle,\rangle$ = usual. Se $x=(1,1)$, então $\|x\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Mas tomando $B = \{(1,0),(1,1)\}$, temos $x = (0,1)_B$ e $\sqrt{2} = \|x\| \neq \sqrt{0^2+1^2} = 1$.

(III) é F, como mostra o ex.: $\mathbb{R}^3$, $\langle,\rangle$ = usual. Seja $S = [(1,0,0)]$ e $x = (0,1,0)$. Então $S^{\perp} = [(0,1,0),(0,0,1)]$. Assim, sendo $y = (0,0,1) \in S^{\perp}$, temos $x \perp y$, mas $x \notin S$.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida por

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in C(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $C(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida por

$$\langle p,q\rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida por

$$\langle(x,y),(x',y')\rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
⟹ [B] todas as afirmações são falsas.
[C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
[D] todas as afirmações são verdadeiras.
[E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

(I) é F, pois sendo $f(x) = \begin{cases} -x, & x<0 \\ 0, & x\in[0,1] \\ x-1, & x>1 \end{cases}$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e $\langle f,f\rangle = \int_0^1 (f(t))^2\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$, mas $f \neq 0$ $\therefore$ $\langle,\rangle$ não é prod. escalar em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

(II) é F, pois $p(t) = (t+\sqrt{2})\cdot t\cdot(t-\sqrt{3})$ tem grau 3 e $\therefore$ $p \in P_3(\mathbb{R})$. Mas $\langle p,p\rangle = 0$ e $p \neq 0$.

(III) é F, pois $\langle,\rangle$ não é simétrica. Ex. $\langle(1,0),(0,1)\rangle = 0-1+0 = -1 \neq 0 = 0-0+2\cdot 0 = \langle(0,1),(1,0)\rangle$

Teste 6 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x+y\| + \|x-y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\operatorname{proj}_{[v,w]} x = \operatorname{proj}_v x + \operatorname{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

→ $\boxed{A}$ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \operatorname{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $(\operatorname{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

$\dim(\operatorname{Ker}(T))^\perp + \dim \operatorname{Ker}(T) = \dim M_3(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Im}(T) + \dim \operatorname{Ker}(T)$.
Logo $\dim \operatorname{Ker}(T)^\perp = \dim \operatorname{Im}(T)$. Agora $T \not\equiv 0$ $\therefore$ $\dim \operatorname{Im}(T) > 0$.
Também $\operatorname{Im}(T) < \mathbb{R}$ $\therefore$ $\dim \operatorname{Im}(T) \leq \dim \mathbb{R} = 1$.
$\therefore$ $\dim \operatorname{Ker}(T)^\perp = \dim \operatorname{Im}(T) = 1$.

- A 3.
- B 5.
- C 4.
- D 2.

→ $\boxed{E}$ 1.

---

6 (I) é F. De fato, tome $x \neq 0$ e $y = -x$. Então $\langle x, y\rangle = \langle x, -x\rangle = -\langle x, x\rangle =$
$= -\|x\|^2 \neq \|x\| \cdot \|x\| = \|x\| \cdot \|-x\| = \|x\| \cdot \|y\|$.

(II) é V. De fato, $x = y$ ou $x = -y \Rightarrow \|x+y\| + \|x-y\| = 2\|y\| = \|x\| + \|y\|$. Reciprocam, se vale a igualld. acima, então $(\|x+y\| + \|x-y\|)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. Logo, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 +$
$+ 2\|x+y\|\|x-y\| = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|$ $\therefore$ $(\|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2) + (\|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2) +$
$+ 2\|x+y\| \cdot \|x-y\| = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|$ $\therefore$ $\underbrace{2\|x+y\| \cdot \|x-y\|}_{\geq 0} = \underbrace{-(\|x\| - \|y\|)^2}_{\leq 0}$

$\therefore$ $\|x+y\| = 0 \Leftrightarrow x = -y$
ou ou
$\|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$. #

(III) é F. : $V = \mathbb{R}^3$; $\langle , \rangle$ = usual; $x = (1,1,1)$; $v = (1,0,0)$; $w = (1,1,0)$.
Logo, $[v,w] = [(1,0,0); (0,1,0)]$ $\therefore$ $\operatorname{pr}_{[v,w]} x = (1,1,0) \neq (2,1,0) = (1,0,0) + (1,1,0) = \operatorname{pr}_v x + \operatorname{pr}_w x$

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\overbrace{\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}}^{u_1}, \overbrace{\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}}^{u_2}, \overbrace{\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}}^{u_3}\right],$$

então uma base para $S^\perp$ será:

$$x=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix} \in S^\perp \Leftrightarrow x \perp u_i,\ \forall i=1,2,3 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha + 2\gamma+\delta=0\\ \alpha+2\beta+\delta=0\\ \alpha+4\beta-2\gamma+\delta=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\gamma+\delta=0\\ \beta-\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-2\gamma-\delta\\ \beta=\gamma\end{cases};\ \gamma,\delta\in\mathbb{R}.$$

$$\therefore x\in S^\perp \Leftrightarrow (\exists \gamma,\delta\in\mathbb{R})\ x = \begin{pmatrix}-2\gamma-\delta & \gamma\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$\longrightarrow$ [A] $\left\{\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$.

[B] $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&-3\end{pmatrix}\right\}$.

[C] $\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\right\}$.

[D] $\left\{\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

[E] $\left\{\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\mathrm{Im}(T))^\perp$ é igual a:

$\dim \mathrm{Im}(T) + \dim(\mathrm{Im}(T))^\perp = \dim M_3(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \mathrm{Ker}(T)$.

Logo, $\dim(\mathrm{Im}(T))^\perp = \dim \mathrm{Ker}(T)$

Agora, $X \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow 0 = T(X) = X + X^t \Leftrightarrow X^t = -X. \Leftrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix}0&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\-\alpha_{12}&0&\alpha_{23}\\-\alpha_{13}&-\alpha_{23}&0\end{pmatrix} = \alpha_{12}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{Y_1} + \alpha_{13}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}}_{Y_2} + \alpha_{23}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}}_{Y_3}$$

Logo $\mathcal{B} = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ é base de $\mathrm{Ker}(T)$.

$\therefore \dim(\mathrm{Im}(T))^\perp = 3.$

[A] 1.

$\longrightarrow$ [B] 3.

[C] 2.

[D] 4.

[E] 6.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p,q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a,b,c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

$q(t)=a+bt+ct^2 \in S \iff q(t)=(2b+c)+bt+ct^2 = b\underbrace{(2+t)}_{q_1(t)}+c\underbrace{(1+t^2)}_{q_2(t)}$.

- [A] 7.
- [B] −3.
- [C] −7.
- [D] 5.
- [E] 3.

e $p(t)=4+\alpha t+\beta t^2 \in S^\perp \iff p\perp q_1$ e $p\perp q_2 \iff$

$\iff \begin{cases} 0=\langle q_1,p\rangle = (4-\alpha+\beta)+2\cdot 4+3(4+\alpha+\beta) = 2\alpha+4\beta+24 \\ 0=\langle q_2,p\rangle = 2(4-\alpha+\beta)+1\cdot 4+2(4+\alpha+\beta) = 20+4\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=-2. \\ \beta=-5 \end{cases}$

$\therefore\ \alpha+\beta=-7$

Teste 11 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right) = 1-t^2,\quad T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right) = t,\quad T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = -1+t^2,$$

$$\text{e}\quad T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = 1+t-t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

$T\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix} = \alpha-\alpha t^2+\beta t-\gamma+\gamma t^2+\delta+\delta t-\delta t^2$

- [A] $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 3$.
- [B] $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$.
- [C] T é injetora.
- [D] $\dim(\mathrm{Im}(T)) < \dim(\mathrm{Ker}(T))$.
- [E] $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$.

$\therefore\ 0=T\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix} = (\alpha-\gamma+\delta)+(\beta+\delta)t+(-\alpha+\gamma-\delta)t^2 \iff$

$\iff \begin{cases} \alpha \quad -\gamma+\delta=0 \\ \quad \beta \quad +\delta=0 \\ -\alpha+\gamma-\delta=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=\gamma-\delta \\ \beta=-\delta \end{cases};\ \gamma,\delta\in\mathbb{R}.$

$\therefore\ x\in \mathrm{Ker}(T) \iff (\exists\, \gamma,\delta\in\mathbb{R})\ x=\begin{pmatrix}\gamma-\delta & -\delta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \gamma\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}}_{u_1}+\delta\underbrace{\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}}_{u_2}.$

$\therefore\ \mathcal{B}=\{u_1,u_2\}$ é base do $\mathrm{Ker}(T)$.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\{x+y : x \in A,\ y \in B\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

(I) é F. $V = \mathbb{R}^4$; $S = [x_1, x_2]$; $x_1 = (1,0,0,0)$, $x_2 = (0,1,0,0)$ $\therefore S^{\perp} = [y_1, y_2]$; $y_1 = (0,0,1,0)$; $y_2 = (0,0,0,1)$. $A = \{x_1, x_2\}$ é L.I. e B é L.I. Mas $\{x_1+y_1, x_2+y_2, x_2+y_1, x_2+y_2\}$ é L.D. !

(II) é V. $(\forall x \in S)$ se $y \in S^{\perp}$, $x \perp y$. $\therefore x \in (S^{\perp})^{\perp} \therefore S \subset (S^{\perp})^{\perp}$

Também $\dim S + \dim S^{\perp} = \dim V = \dim (S^{\perp})^{\perp} + \dim (S^{\perp})$

$\therefore \dim S = \dim (S^{\perp})^{\perp} \therefore S = (S^{\perp})^{\perp}$.

(III) é V. pois $(\forall x \in V)$ $x = \underbrace{pr_S x}_{\in S} + \underbrace{(x - pr_S x)}_{\in S^{\perp}}$

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $C([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, \mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in C([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in C([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - a g_1 - b g_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

Sendo $S = [g_1, g_2]$, o que se busca é $pr_S f = pr_{g_1} f + pr_{g_2} f$ (já que $g_1 \perp g_2$). Agora, $\langle g_1, g_1 \rangle = \pi = \langle g_2, g_2 \rangle$.

$\langle f, g_1 \rangle = 2\pi$ e $\langle f, g_2 \rangle = 0$.

Logo, $pr_S f = \left(\frac{2\pi}{\pi}\right) g_1 + \left(\frac{0}{\pi}\right) g_2 = 2 g_1 + 0 g_2$

$\therefore a + b = 2 + 0 = 2$

- [A] $-\pi$.
- [B] 2.
- [C] π.
- [D] 1.
- [E] -1.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

$u_1(t) = 1$; $v(t) = t^4$; $pr\ v = a\cdot u_1 + b\, u_2$. , onde $u_2(t) = t$ $[u_1, u_2]$

A $\frac{1}{2}$.

B $-\frac{1}{5}$.

C 0.

D $\frac{1}{5}$.

E $\frac{3}{5}$.

$$\begin{cases} \langle u_1,u_1\rangle a + \langle u_1,u_2\rangle b = \langle u_1, v\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle a + \langle u_2,u_2\rangle b = \langle u_2, v\rangle \end{cases} \iff \begin{cases} a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = \frac{1}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{-1}{5} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$\therefore\ a + b = \frac{3}{5}$

Teste 15 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B apenas a afirmação (I) é verdadeira.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

(I) é V. De fato,

$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\therefore\ \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ ...(i)

Também, $\|y\| = \|(y-x)+x\| \leq$

$\leq \|(y-x)\| + \|x\| = \|x\| + \|x-y\|$.

Logo, $-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\|$ ...(ii).

Logo, de (i) e (ii) vem: $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$.

(II) é V., pois $\{x, y, x+y\}$ sempre é L.D. ($x + y = 1\cdot x + 1\cdot y$)., independentem/ de quais sejam x e y.

(III) é F, pois sendo $x \neq 0$ e $y = +x$, temos $|\langle x,y\rangle| = |\langle x,x\rangle| = \|x\|^2 = \|x\|\cdot\|y\|$ mas $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1,-1,2,-3), \quad v_2 = (1,1,3,2),$$
$$v_3 = (1,-5,0,2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1,1,1,1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a,b,c,0)$, então $a+b+c$ será igual a:

A $\frac{4}{15}$.
B $\frac{1}{15}$.
C $-\frac{2}{15}$.
D $\frac{8}{15}$.
E 0.

Dado que $v_2 \perp v_1$, segue que $w_2 = v_2$ ($w_1 = v_1$). e que $v_3 \perp w_1, w_2$, $\therefore w_3 = v_3$. Logo, $w_4 = v_4 - (pr_{w_1} v_4 - pr_{w_2} v_4 - pr_{w_3} v_4)$.

Agora, $pr_{w_1} v_4 = \frac{-1}{15}(1,-1,2,-3)$; $pr_{w_2} v_4 = \frac{7}{15}(1,1,3,2)$;

$pr_{w_3} v_4 = \frac{-1}{15}(1,-5,0,2)$

$\therefore w_4 = v_4 - \frac{1}{15}(5,13,19,15)$. $\therefore w_4 = \frac{1}{15}(10,2,-4,0)$.

Logo, $a+b+c = \frac{8}{15}$