Instituto de Matemática e Estatística da USP
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Prova de Seleção - 18 de maio de 2013

Nome: ____

PARTE 1: Cálculo (Valor: 6 pontos)

Questão 1. (1,5)

a) Determine todos os valores de x para os quais $\left|\dfrac{1}{x}+1\right| < \dfrac{1}{2}$. Faça uma representação geométrica.

b) A função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ é contínua em $x_0=-1$? Justifique.

c) Dê um exemplo de uma função g que não é contínua em $x_0=2$ e $|g|$ é contínua em $x_0=2$.

Questão 2. (2,0) Para cada valor de $k\in\mathbb{R}$ fixado, defina a função

$$f_k(x)=x^3-3x+k, \qquad x\in\mathbb{R}$$

a) Faça um esboço do gráfico da função $f_0(x)=x^3-3x$, destacando suas raízes e seus pontos de máximo local e de mínimo local.

b) Faça um esboço de f_1.

c) Explique por quê cada função f_k tem, no máximo, uma raiz no intervalo $[-1,1]$.

d) Para que valores de k a função f_k não tem raízes no intervalo $[-1,1]$?

Questão 3. (1,0) Verifique se cada um dos cálculos de limite abaixo está correto. Justifique sua resposta.

a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\mapsto 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\mapsto 1}\frac{6x}{2}=3.$

b) Como $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0}\frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{|x|\sqrt{x^2+1}}{x}$, o limite não existe.

Questão 4. (1,5) Considere as funções $f(x)=\cos x$ e $g(x)=\operatorname{sen} x$.

a) Determine a área da região do plano limitada pelos gráficos das funções f e g e pelas retas $x=0$ e $x=\dfrac{\pi}{2}$.

b) Encontre $x_0\in]0,\dfrac{\pi}{2}[$ tal que a reta tangente ao gráfico de $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ no ponto de abscissa x_0 seja horizontal.

PARTE 2: Álgebra (Valor: 4 pontos)

Notação. Denotamos o conjunto dos números naturais por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ e $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros. Também denotamos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ e $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.
Denotamos por $a \,|\, b$ a expressão "a divide b".

Questão 1. (1,0) Seja $a \in \mathbb{N}^*$. Mostre, justificando, que

a) $3 \,|\, a$ se e somente se o último algarismo de a escrito em base 9 é múltiplo de 3.

b) $2 \,|\, a$ se e somente se a soma dos algarismos de a escrito em base 9 é múltiplo de 2.

Questão 2. (1, 0) Verifique se cada relação R abaixo é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}^*$ ou não. Em caso positivo, estabeleça o número de classes de equivalência distintas determinados pela relação. Justifique sua resposta.

a) $a\,R\,b$ se e somente se $\text{mmc}(a, b) = \max\{|a|, |b|\}$

b) $a\,R\,b$ se e somente se $\text{mdc}(a, 30) = \text{mdc}(b, 30)$

Questão 3. (1,0) Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros munido das operações usuais de adição e de multiplicação. Sendo $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, a **relação de congruência módulo** p em $\mathbb{Z}$ é definida da seguinte maneira:

Definição. Dados x e y em $\mathbb{Z}$, dizemos que x **é congruente a** y **módulo** p se $p|(x - y)$. Denota-se por $x \equiv y \pmod{p}$.

Decida se cada afirmação é verdadeira ou falsa para x e y quaisquer pertencentes a $\mathbb{Z}^*$. Se a afirmação for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contraexemplo.

(i) $x \cdot y \equiv 0 \pmod 6 \Longrightarrow x \equiv 0 \pmod 6$ ou $y \equiv 0 \pmod 6$

(ii) $x \cdot y \equiv 0 \pmod 7 \Longrightarrow x \equiv 0 \pmod 7$ ou $y \equiv 0 \pmod 7$

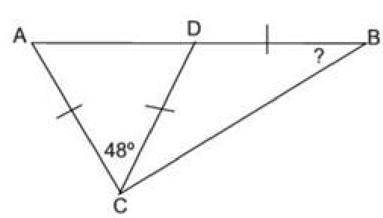
Questão 4. (1,0) Prove, usando o princípio de indução finita, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$, vale:

$$2^n > n^2$$

PARTE 3: Geometria (Valor: 4 pontos)

Questão 1. (2,0) Para o problema:

Dado o triângulo ABC como na figura e um ponto D no lado AB tal que valem as igualdades entre as distâncias $d(A, C) = d(D, C) = d(D, B)$, encontrar a medida do ângulo do vértice B.



dois alunos apresentaram as seguintes soluções:

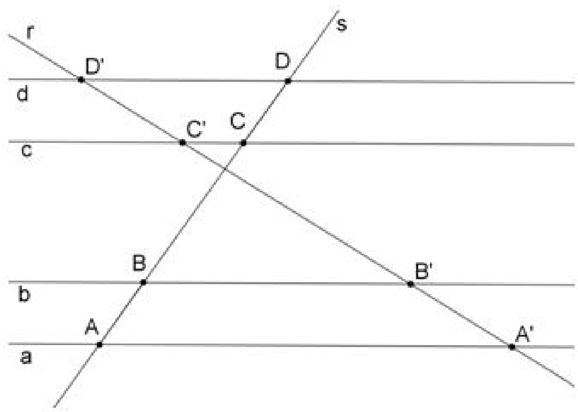
ALUNO 1: O triângulo ABC é um triângulo retângulo e o triângulo ADC é isósceles, logo, a medida do ângulo do vértice B é 42°.

ALUNO 2: Os triângulos ACD e CDB são isósceles, a medida do ângulo $C\hat{D}B$ é 96° e a medida do ângulo do vértice B é 42°.

a) Avalie as soluções apresentadas pelos alunos e aponte se os argumentos por eles utilizados são corretos ou errados.

b) Apresente uma solução detalhada para o problema, justificando todas as suas afirmações.

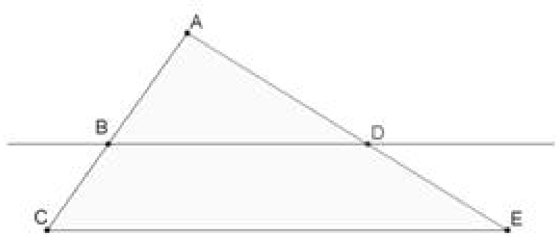
Questão 2. (2,0) Na figura, as retas a, b, c e d são retas paralelas que são cortadas pelas retas r e s, determinando os segmentos $\overline{AA'}$ $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, e $\overline{DD'}$, respectivamente.



a) Prove, sem utilizar o teorema de Tales, que, se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, então os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ também o serão.

b) Enuncie o Teorema de Tales e comente sobre os passos necessários para a sua demonstração.

c) Considere a figura



Prove que se $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$ então a reta BD é paralela ao segmento $\overline{CE}$.