Prova de Seleção para o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Turma de 2015

PARTE I: CÁLCULO

I-1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Sabendo que $(-1,1),(1,1)$ e $(2,4)$ são pontos do gráfico de f, decida se cada uma das questões abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique cuidadosamente suas afirmações.

(a) f assume valor mínimo e valor máximo no intervalo $[-1,1]$.

(b) Existe $x_0 \in [-1,1]$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é horizontal.

I-2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x^2$.

(a) Determine a reta r tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$.

(b) Verifique que -1 é raiz de $5x + 3 - x^3 + x^2 = 0$ e resolva a inequação $5x + 3 - x^3 + x^2 \geqslant 0$.

(c) Esboce a região compreendida entre o gráfico de f e a reta r, do item (a), e calcule sua área.

I-3 Seja F uma primitiva de f, em $\mathbb{R}$, e $G(x) = F(\cos 2x)$.

(a) Sabendo que $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a$, $a \neq 0$, calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{F(x)}$.

(b) Determine $G'(0)$.

PARTE II: GEOMETRIA

II-1 Considere o problema: *dados uma reta r e um ponto P, construir a reta s paralela a r passando por P.*

Utilizando régua e compasso é possível fornecer a seguinte solução.

Construção:

1. Escolher em r um ponto 0 de modo que $\overleftrightarrow{OP}$ não seja perpendicular a r.
2. Com ponta seca em 0 e abertura OP, traçar a circunferência que encontra r nos pontos A e B.
3. Com abertura AP e ponta seca em B, traçar o arco de circunferência que intercepta a circunferência anterior em Q (Q está no mesmo semi-plano de P determinado por r.
4. Traçar a reta $\overleftrightarrow{PQ}$. $\overleftrightarrow{PQ}$ é a reta s procurada.

Pede-se: justifique por que a construção dada resolve o problema, isto é, por que $\overleftrightarrow{PQ}$ é paralela a r.

II-2. Seja $\hat{A}$ um ângulo tal que $0° < \operatorname{med}(\hat{A}) \leqslant 180°$.

(a) Construa a bissetriz de $\hat{A}$. Descreva sua construção.

(b) Justifique a construção dada no item anterior.

(c) Prove que a bissetriz de um ângulo é única.

PARTE III: ÁLGEBRA

III-1. Dado um número inteiro $N \in \mathbb{Z}$, dizemos que os números $a, b \in \mathbb{Z}$ são *congruentes módulo* N, denotado $a \equiv b \mod N$, se N dividir a diferença $a - b$

(a) Mostre que $a \equiv b \mod N$ se, e somente se, as divisões de a por N e de b por N terão o mesmo resto $0 \leq r < |N|$.

(b) Mostre que as classes de $2^n - 1$ e de $2^n + 1$ satisfazem a relação $X^2 \equiv 1 \mod 2^{n+1}$.

(c) Ache todas as soluções $X \in \{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ da relação $X^2 \equiv 1 \mod 16$.

III-2. Calcule os polinômios $Q(X)$ e $R(X)$, tais que $F(X) = G(X)Q(X) + R(X)$, com o grau de $R(X)$ menor que o de $G(X)$ (ou $R(x) = 0$, se a divisão for exata), sendo que $F(X) = X^4 + X^3 - X^2 + 2X + 5$ e $G(X) = X^2 + X - 1$. Explique.