INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA USP

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Exame de Admissão – 05/11/2016

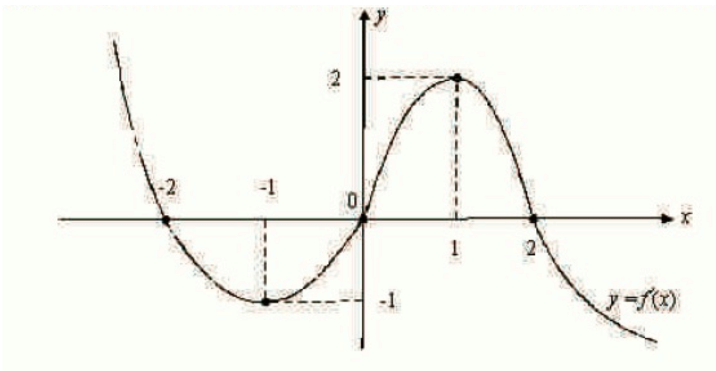
Nome:____ Documento:_________________

Parte I: **Cálculo** (6 pontos)

I.1) (1,5 pontos) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até ordem 2 pelo menos e tal que:

$f(-2) = 0$; $f(-1) = -1$; $f(0) = -2$; $f(1) = 1$; e $f(2) = 2$.

A seguir, apresenta-se o esboço do gráfico da função $f\,'$, a derivada de f:



a) Determine os intervalos em que a função f é crescente e aqueles em que é decrescente, e também, se existirem, seus pontos de máximo e de mínimo locais (ou relativos), bem como os valores da função nesses pontos.

b) Determine os intervalos em que a concavidade do gráfico de f é para cima e aqueles em que é para baixo, bem como, se existirem, seus pontos de inflexão com os respectivos valores.

c) Faça um esboço do gráfico da função f.

I.2) (2,0 pontos) Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, fornecendo uma prova ou um contraexemplo.

a) Se f é uma função contínua em um intervalo I, então f admite um ponto de máximo local ou de mínimo local em I.

b) Se uma função definida em $[a,b]$ é derivável em $]a,b[$ então existe pelo menos um ponto c nesse último intervalo tal que $f\,'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

c) $\int_{-2}^{2}(1-|x|)dx = 0$.

d) $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ é convergente se e somente se $p > 1$.

I.3) (2,5 pontos)

a) Considere a atividade: "Determine as soluções da inequação $\big|1-|1-|x-2||\big| < 3$". Diante de uma questão desse tipo, a maioria dos alunos do Ensino Médio tentaria resolvê-la algebricamente. Dada a dificuldade, uma sugestão é buscar a solução usando gráficos de funções. Resolva a atividade dessa maneira. Se achar produtivo adotar essa estratégia em sala de aula, comente como faria e com quais recursos. Se não achar factível, justifique.

b) Ao resolver a equação $|x-1| = -\frac{x}{2}$, o aluno iniciou elevando ambos os membros da equação ao quadrado. Após um trabalho algébrico, chegou às seguintes soluções: $x = 2$ ou $x = \frac{2}{3}$. Recupere e avalie a resolução do aluno e descreva como você encaminharia uma discussão sobre essa questão, com ativa participação dos estudantes da classe.

Parte II: **Geometria** (4 pontos)

II.1) (2,0 pontos)

a) Dado um ângulo $X\hat{O}Y$, justifique os passos da construção da bissetriz $\overrightarrow{OD}$:

1º) Marque P em $\overrightarrow{OX}$ e trace γ circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$.
2º) Marque Q intersecção de γ com $\overrightarrow{OY}$.
3º) Trace γ_1 circunferência de centro P e raio $\overline{OP}$ e γ_2 circunferência de centro Q e raio $\overline{OP}$.
4º) $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{O, D\}$.
5º) $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de $X\hat{O}Y$.

b) Em um triângulo ΔABC tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, prove a validade da propriedade:
"Se $\overrightarrow{AD}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e se $\{M\} = \overrightarrow{AD} \cap \overline{BC}$, então
M é o ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overline{AM}$ é a altura relativa a $\overline{BC}$".

II.2) (2,0 pontos) Um aluno do Ensino Médio faz as afirmações abaixo enunciadas, mas não sabe justificá-las. Indique como você poderia encaminhar uma discussão em sala de aula que leve os estudantes a indicar, nos casos pertinentes: contraexemplos; formular justificativas para a validade de uma afirmação; ou completar hipóteses para obter um resultado válido.

a) Se uma reta *t* corta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo *ABC*, então *t* não corta o lado $\overline{BC}$.
b) Existe P, $P \neq X$, tal que os ângulos $X\hat{O}Y$ e $P\hat{O}Y$ são iguais.
c) Existe P, $P \neq X$, tal que os ângulos $X\hat{O}Y$ e $P\hat{O}Y$ são congruentes.
d) Se $\Delta MNP \equiv \Delta MNQ$ então $P = Q$.
e) Um quadrilátero é um losango se e somente se suas diagonais são perpendiculares.

Parte III: **Álgebra** (4 pontos)

III.1) (2,4 pontos)

a) Como aplicação do algoritmo da divisão em $\mathbb{N}$, demonstre o seguinte teorema:
"Sejam $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ e $a \in \mathbb{N}^*$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i = 0, 1, ..., n$
existe único $r_i \in \mathbb{N}$, com $0 \leq r_i < b$, tais que $a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + ... + r_1 b + r_0$."

<u>Observação</u>: nessas condições, dizemos que a expressão "$r_n r_{n-1} ... r_1 r_0$" é a representação de *a* na base *b*, e escrevemos $(a)_b = r_n r_{n-1} ... r_1 r_0$.

b) Enuncie e prove uma regra de divisibilidade por 3 para números naturais escritos na base seis.

c) Descreva uma abordagem para os critérios de divisibilidade por 2 e por 3 (para números escritos em base dez) que considere adequada para a discussão do tema em uma classe do 7º ano do Ensino Fundamental.

III.2) (1,6 pontos)

a) Determine os divisores de zero e os elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_{15}$. Para cada elemento $\bar{a}$ de $\mathbb{Z}_{15}$ que seja divisor do zero, determine outro $\bar{b} \neq \bar{0}$ tal que $\bar{a}.\bar{b} = \bar{0}$, e para cada invertível determine o seu inverso. Justifique seus procedimentos.

b) Decida se $\overline{1500}$ é invertível em $\mathbb{Z}_{4325}$. Se for determine seu inverso. Justifique seus raciocínios.