Prova de Seleção para o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Turma de 2018 - 11/11/2017

Nome:____

Documento:______________________________________

Parte I: Cálculo.

I.1 (2 pontos) Com base no Teorema – "Dada f contínua no intervalo I, se $f'(x) > 0$, para todo x no *interior* de I, então f será estritamente crescente em I." – exiba contra-exemplos que evidenciem a necessidade de:

(a) I ser um intervalo;

(b) f ser contínua em I.

I.2 (2 pontos) Observe que a dízima periódica $0,777\ldots$ pode ser interpretada como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n} = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \ldots,$$

ou seja, estamos descrevendo a dízima como uma série geométrica. Sendo assim, pede-se:

(a) a soma dos n primeiros termos desta série;

(b) a fração que esta série (e, portanto, a dízima periódica apresentada) representa.

Justifique detalhadamente cada item respondido.

I.3 (2 pontos) Calcule o coeficiente angular máximo das retas tangentes ao gráfico da função f dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$.

Parte II. Álgebra

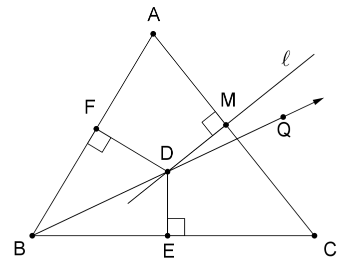
II.1 (2,0 pontos) Descreva como apresentar a um aluno de ensino médio (possivelmente, um candidato à OBMEP) o Princípio da Indução Finita.

II.2 (2,0 pontos) Explique o algoritmo da divisão de polinômios. Calcule o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ por $Q(x) = x^2 + 4$.

Parte III. Geometria

III.1 (2 pontos) Um aluno do Ensino Médio apresentou o seguinte raciocínio envolvendo um triângulo:

Dado um triângulo qualquer $\triangle ABC$ *seja* M *o ponto médio de* $\overline{AC}$, ℓ *a reta perpendicular a* $\overline{AC}$ *passando por* M, $\overrightarrow{BQ}$ *a bissetriz do ângulo* $\angle ABC$ *e* $D \in \ell \cap \overrightarrow{BQ}$. *Considere os pontos* E *e* F *tais que* $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{BC}$ *e* $\overleftrightarrow{DF} \perp \overleftrightarrow{AC}$. *Então* $\overline{FD} \cong \overline{ED}$. *Além disso também vale que* $\overline{AD} \cong \overline{CD}$. *Segue então que* $\triangle AFD \cong \triangle CED$ *e* $\triangle BDF \cong \triangle BDE$. *Logo* $BA = BF + FA = BE + EC = BC$ *e, portanto,* $\overline{BA} \cong \overline{BC}$.



1. O que foi que o aluno concluiu com esta resolução?

2. Você concorda com esta conclusão do aluno? Se sim, justifique as passagens feitas na demostração dada por ele. Caso contrário, como você encaminharia uma discussão para mostrar que existe um erro no raciocínio feito. Além disso, nesta última situação, identifique o erro cometido pelo aluno.

III.2 (2 pontos) Após assumirmos a validade do Postulado das Paralelas, podemos usar o seguinte resultado: *Dadas duas retas r e s e uma transversal t, temos que $r \parallel s$ se, e somente se, os ângulos altenos internos determinados pela transversal t são congruentes.*

1. Enuncie o Postulado das Paralelas.

2. A demostração de uma das implicações do resultado anterior só é possível com a validade do Postulado das Paralelas. Demostre apenas esta parte do resultado.