MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
EXAME DE ADMISSÃO PARA AGOSTO DE 2019

NOME: ______________________________

Documento: ______________________________

I-Cálculo

Questão 1 (2 pontos) O Teorema do Valor Médio (T.V.M.) afirma que: *se a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Encontre exemplos que comprovem a necessidade de se supor, nas hipóteses do T.V.M., que:

(a) f contínua em $[a, b]$;

(b) f derivável em $]a, b[$.

Questão 2 (2 pontos) Prove, utilizando apenas conteúdos da Educação Básica, que $0,999\ldots = 1$ e posteriormente discuta como você apresentaria este assunto a uma turma deste nível de escolaridade.

Questão 3 (2 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (com $\alpha \neq 0$), demonstre que o vértice da parábola dada pelo gráfico da função é o seu ponto de mínimo ou máximo, posteriormente exiba as coordenadas deste ponto em função de α, β e γ.

II-Álgebra

Questão 4 (2 pontos) Seja $p \geq 2$ um número primo. Mostre que se $0 < a < p$, existe $b < p$, tal que $ab \equiv 1 \mod p$ (você pode usar um argumento de contagem). Dê exemplo de que isto não ocorrerá quando p não for primo.

Questão 5 (2 pontos) O problema abaixo apareceu no exame da FUVEST de 1991.

No alto da torre de uma emissora de televisão, duas luzes "piscam" com frequências diferentes. A primeira "pisca" 15 vezes por minuto e a segunda "pisca" 10 vezes por minuto. Se num certo instante, as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a "piscar simultaneamente"?

Como você encaminharia um estudante de ensino médio a resolver este problema? Qual é o conceito atrás deste problema?

III-Geometria

Questão 6 (2 pontos) No que segue, $\overline{AB}$ indica o segmento de reta de extremidades A e B; AB indica a medida do segmento de reta de extremidades A e B.

Seja N o ponto do lado $\overline{AC}$ do triângulo $\triangle ABC$ tal que $AN = 2NC$ e M o ponto do lado $\overline{AB}$ tal que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Sabendo que $AC = 12$ e que o baricentro G do $\triangle ABC$ pertence a $\overline{MN}$:

(a) prove que, nessas condições, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (são paralelos);

(b) determine o comprimento de $\overline{BG}$.

Questão 7 (2 pontos) Um professor abordou o Teorema de Pitágoras com seus alunos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental. Optou por apresentar o seguinte enunciado do teorema: *Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.* Na sequência, discutiu alguns exemplos para verificar o resultado e propôs uma lista de "exercícios de aplicação". Dentre eles, figurava o exercício que segue:

O triângulo de lados 1, 3 *e* $\sqrt{10}$ *é retângulo? Justifique sua resposta.*

(a) Enuncie e prove a propriedade que deve ser indicada na justificativa da resolução do referido exercício.

(b) Discuta as escolhas feitas pelo professor tanto de enunciado para o Teorema de Pitágoras quanto do exercício de aplicação mencionado.