

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Matemática e Estatística

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Exame de Admissão – 18 de Fevereiro de 2021

0 – Identificação

No início da primeira folha de respostas deve constar:

1. Nome completo
2. RG
3. Assinatura
4. Imagem do Documento de Identificação (com foto e assinatura) frente e verso, podendo ser RG, CNH ou RNE (se estrangeiro).

Atenção:

- JUSTIFIQUE todas as suas respostas e raciocínios, apresentando resoluções detalhadas e explicitando as definições ou propriedades utilizadas. Somente respostas ou resultados de cálculos – sem justificativas – não serão pontuados.
- NÃO é permitida consulta de qualquer natureza (pessoas, internet, livros ou outro material, seja impresso ou digital).

1 – Cálculo

Questão 1 (2,0 pontos)

Mostre que o polinômio $p(x) = x^5 - 2x + 1$ tem uma única raiz real entre 0 e 1 (isto é, em $[0, 1] - \{0, 1\}$).

Questão 2 (2,0 pontos)

Sem usar derivadas (usando apenas a Matemática da Educação Básica) como você provaria que o quadrado é o retângulo de maior área inscrito em um círculo dado?

Questão 3 (2,0 pontos)

Um aluno resolveu a desigualdade: $\frac{x-2}{x-1} < \frac{x-1}{x-2}$

fazendo a “multiplicação cruzada” $(x - 2)^2 < (x - 1)^2$, extraiu as raízes, $x - 2 < x - 1$ e chegou ao resultado $0 < 1$, o que o deixou perplexo.

Comente como você encaminharia a solução do problema a esse aluno. Explícite os argumentos usados em cada passo da solução: o que fazer e por que fazer dessa maneira.

2 – Álgebra

Questão 4 (2,0 pontos)

Considere a equação

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

- Encontre todas as raízes complexas desta equação.
- Fatore o polinômio $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ em $\mathbb{R}[x]$.

Questão 5 (2,0 pontos)

Em uma prova, um aluno encontrou o seguinte problema:

Sabemos que o resto da divisão de 510314971 por 13257 é 13, e que o resto da divisão de 1055071627 pelo mesmo 13257 é 25. Quais são os restos das divisões de $510314971 + 1055071627$ e de $510314971 \times 1055071627$ por 13257?

O aluno reclamou que não tinha tempo suficiente para fazer as contas, principalmente a de multiplicação.

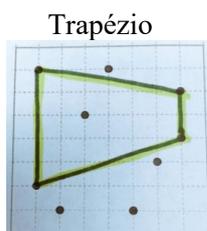
Como você explicaria ao aluno um método rápido de fazer os cálculos sem ter que fazer a soma e a multiplicação e depois as divisões? Qual(is) conceito(s) está(ão) envolvido(s) nesta questão?

3 – Geometria

Questão 6 (2,0 pontos)

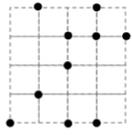
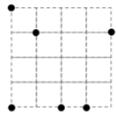
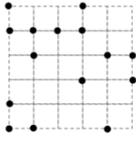
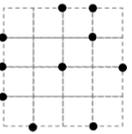
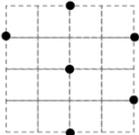
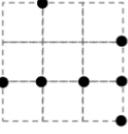
A professora Ana propôs uma atividade denominada “Zukei puzzles.”¹ para seus alunos do 9º ano.

Cada quebra-cabeça é composto de vários pontos. Alguns desses pontos devem ser usados como vértices para formar a figura nomeada no quebra-cabeça. Por exemplo, a imagem abaixo mostra um trapézio feito com 4 dos pontos dados. Os pontos restantes são irrelevantes para o quebra-cabeça, essencialmente eles são usados como distratores.

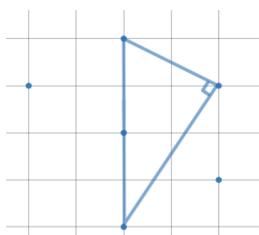


¹ Disponível em: <https://buildingmathematicians.wordpress.com/2018/03/08/zukei-puzzles/> acesso em: 02 fev. 2020)

E apresentou vários desses desafios para os alunos:

<p>(1) Retângulo</p> 	<p>(2) Triângulo isósceles</p> 	<p>(3) Quadrado</p> 
<p>(4) Losango</p> 	<p>(5) Triângulo retângulo</p> 	<p>(6) Paralelogramo</p> 

Para o desafio (5), um aluno propôs a seguinte solução:



O professor questionou a turma acerca da referida resposta, se estava correta ou não e por quê. Obteve as respostas abaixo.

(A) **Resposta de Artur:**

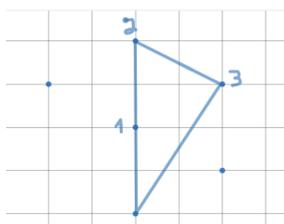
“Eu fiz no *Geogebra*, medi o ângulo e verifiquei que não é 90° .”

(B) **Resposta de Beth:**

“Não é triângulo retângulo, pois usando Pitágoras, dá para verificar que não é ângulo reto.”

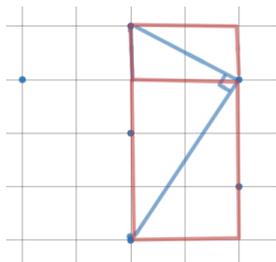
(C) **Resposta de Cecília:**

“Se fizer uma circunferência com centro no ponto 1 e passando por 2, dá para ver que não passa pelo 3.” (se referindo à figura abaixo)



(D) **Resposta do Daniel:**

“Não está certa, pois tem que olhar as inclinações das diagonais dos retângulos e verificar que não formam ângulo reto.”



- Indique o(s) objetivo(s) de aprendizagem que consideraria para uma aula onde propusesse a tarefa acima apresentada.
- Analise cada uma das respostas apresentadas pelos alunos e indique, justificando, se estão corretas ou não. Em seguida, complemente as respostas (corretas ou parcialmente corretas) explicitando todas as propriedades que as justificam.

Questão 7 (2,0 pontos)

Verdadeiro (V) ou falso (F)? Justifique.

Dado um triângulo ABC qualquer.

- Se ΔABC é isósceles, com $AB = AC$, então a bissetriz do $\angle BAC$ também é altura e mediana relativamente ao lado \overline{BC} .
- Se a bissetriz do $\angle BAC$ também for mediana relativamente ao lado \overline{BC} então ΔABC é isósceles.