UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prova Escrita para Ingresso em 2023

Questão 1. (2,0 pontos) Seja $A = \mathbb{Q}[X]$ o anel dos polinômios com coeficientes racionais. Dado $P(X) \in A$, mostre que a relação $\sim_P$ em A, dada por

$$\boxed{Q \sim_P R \text{ se, e somente se } P \text{ divide a diferença } Q - R \text{ em } A,}$$

é uma relação de congruência em A (ou seja, uma *relação de equivalência*, tal que se $Q_1 \sim_P Q_2$ e $R_1 \sim_P R_2$, então $Q_1 + R_1 \sim_P Q_2 + R_2$, e $Q_1 \cdot R_1 \sim_P Q_2 \cdot R_2$).

Questão 2. (2,0 pontos) A habilidade EM13MAT310 da BNCC é descrita a seguir:

Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princpios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

A. Como o jogo infantil do "*par ou ímpar*" se encaixa nessa descrição e qual o conceito algébrico envolvido nesse jogo?

B. Como você elaboraria uma sequência didática para a introdução do referido conceito?

Questão 3. (2,0 pontos) Dada a função $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$, pede-se:

a) Encontre o domínio e as raízes de f e calcule $\lim_{x \to \infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Encontre os intervalos de crescimento e de decrescimento da função.

c) Encontre os intervalos em que a função possui concavidade para cima e os intervalos em que possui concavidade para baixo.

d) Encontre as assíntotas, se existirem.

e) Esboce o gráfico de f.

Questão 4. (2,0 pontos)

(a) Ao resolver um limite, um estudante escreveu a seguinte expressão como resposta:

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)=\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=(x-2)=-4.$$

No entanto, a resolução foi considerada errada pelo corretor, por quê?

(b) Dada R_t a região do plano limitada pelo gráfico de $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, pelo eixo Ox e pelas retas $x=1$ e $x=t$. Determine $A(t)=\text{área}(R_t)$, para $t\in[1,\infty[$ e calcule $\lim_{t\to\infty}A(t)$.

Questão 5. (2,0 pontos)

Quando apresentada, muitas vezes a igualdade $0,999...=1$ causa surpresa a estudantes. Uma verificação de tal informação pode ser dada pela interpretação

$$0,999...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}.$$

(a) Encontre uma expressão dependente de m para $\sum_{n=1}^{m}\frac{9}{10^n}$;

(b) utilizando limite para m tendendo a infinito na expressão acima, prove que

$$0,999...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=1;$$

(c) como você justificaria tal igualdade numa turma da educação básica?