UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prova de seleção para ingresso no primeiro semestre de 2024

Parte 1 – Cálculo

QUESTÃO 1 (1,5 pontos)

Nos últimos anos, lemos muitas manchetes como a que está ilustrada a seguir:

G1

Crescimento exponencial e curva epidêmica: entenda os principais conceitos matemáticos que explicam a pandemia de coronavírus

Enquanto cientistas correm contra o tempo para desenvolver tratamentos e vacina contra o coronavírus (Sars-CoV-2), matemáticos simulam...

31 de mar. de 2020

Fonte: https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/03/31/crescimento-exponencial-e-curva-epidemica-entenda-os-principais-conceitos-matematicos-que-explicam-a-pandemia-de-coronavirus.ghtml

No texto na íntegra, lemos também, “no caso de um surto como o do coronavírus, o cenário é assustador, já que o número de infectados do dia anterior é sempre muito menor que o atual” e o exemplo dado é o seguinte:

“O professor dá como exemplo um cenário de uma epidemia em que o número de novos casos dobra a cada 3 dias. No primeiro dia você tem 1 caso; no terceiro dia terá 2 casos. Levou três dias para dobrar o valor inicial. No sexto dia serão 4 casos, no nono dia serão 8, e assim por diante.” (adaptado)

A partir disso, elabore e descreva uma atividade que possa explorar os elementos centrais desse contexto em uma aula de matemática, de 50 minutos, para o sexto ano do Ensino Fundamental.

QUESTÃO 2 (1,5 pontos)

Na bibliografia estudada para esta prova, há uma importante menção ao número *e* no curso de Cálculo, conforme podemos ler a seguir:

O Número e

Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo. A escolha de uma base a é influenciada pela maneira que o gráfico de $y = a^x$ cruza o eixo y. As Figuras 10 e 11 mostram as retas tangentes para os gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3^x$ no ponto $(0, 1)$. (As retas tangentes serão definidas precisamente na Seção 2.7. Para as finalidades presentes, você pode pensar na reta tangente para um gráfico exponencial em um ponto como a reta que toca o gráfico somente naquele ponto.) Se medirmos as inclinações dessas retas tangentes em $(0, 1)$, descobrimos que $m \approx 0{,}7$ para $y = 2^x$ e $m \approx 1{,}1$ para $y = 3^x$.

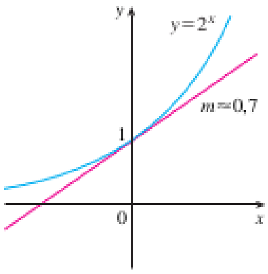

FIGURA 10

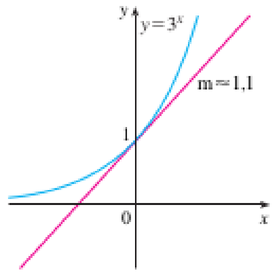

FIGURA 11

Conforme será visto no Capítulo 3, as fórmulas do cálculo ficam muito simplificadas quando escolhemos como base a aquela para a qual resulta uma reta tangente a $y = a^x$ em $(0, 1)$ com uma inclinação de *exatamente* 1. (Veja a Figura 12.) De fato, *existe* um número assim e ele é denotado pelo caractere e. (Esta notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727, provavelmente porque é o primeiro caractere da palavra *exponencial*.) Na visualização das Figuras 10 e 11, não surpreende que o número e está entre 2 e 3 e o gráfico de $y = e^x$ esteja entre os gráficos $y = 2^x$ e $y = 3^x$. (Veja a Figura 13.) No Capítulo 3 veremos que o valor de e correto até a quinta casa decimal é

$$e \approx 2{,}71828$$

Podemos chamar a função $f(x) = e^x$ de **função exponencial natural**.

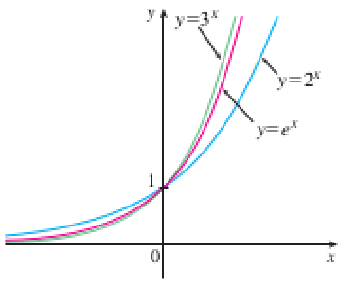

FIGURA 13

Sobre o número *e* e sua relevância no contexto das funções exponenciais no curso de Cálculo,

(a) Caracterize o número *e* com outras informações além das contidas no texto;

(b) O que você pode afirmar sobre a derivada da função $f(x) = e^x$?

Parte 2 – Álgebra

QUESTÃO 3 (1,5 pontos)

Considere a seguinte afirmação: “Para qualquer conjunto de cinco números inteiros é possível sempre escolher três números desse conjunto cuja soma seja um número múltiplo de 3”.
Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

QUESTÃO 4 (1,5 pontos)

Em uma aula de matemática, Milena indagou: “Professora, notei que os números 9, 12 e 15 podem ser representados como soma de números consecutivos. Isso acontece sempre? Posso fazer a mesma coisa com os múltiplos de 4, representar como soma de números consecutivos?”
Quais seriam as suas respostas e justificativas?

Parte 3 – Geometria

QUESTÃO 5 (2 pontos)

Considere um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em A.

(a) Faça um esboço do triângulo e enuncie o Teorema de Pitágoras, destacando hipótese e tese.
(b) Trace a altura AH, relativa à hipotenusa do triângulo ABC.
(c) Quantos triângulos retângulos podem ser destacados nesse esboço? Explicite-os.
(d) Quais desses triângulos são semelhantes? Justifique.
(e) Escreva pelo menos mais duas relações (chamadas pitagóricas) que podem ser demonstradas a partir dessa configuração. Justifique.
(f) Escolha uma delas para demonstrar.
(g) Enuncie a recíproca do Teorema de Pitágoras, destacando hipótese e tese.

QUESTÃO 6 (2 pontos)

No plano, considere um feixe de retas paralelas, cortadas por duas transversais e suponha que você quer demonstrar o Teorema de Thales para seus alunos.

(a) Enuncie pelo menos três conhecimentos prévios que os alunos precisam ter para acompanhar essa aula.

(b) Faça esboços das situações possíveis e que precisam ser discutidas com os alunos.

(c) Enuncie o Teorema de Thales, destacando hipótese e tese.

(d) Enuncie uma possível recíproca do Teorema de Thales, destacando hipótese e tese.

(e) Essa recíproca é verdadeira ou falsa? Se for falsa, mostre, com um exemplo, porque é falsa.

(f) Você acha importante discutir contraexemplos em suas aulas de Matemática da Educação Básica? Argumente.