A gloriosa história da geometria

Claudio Gorodski

http://www.ime.usp.br/~gorodski/

gorodski@ime.usp.br

VII Semana de Matemática da

Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia, Minas Gerais

27 a 30 de novembro de 2007

Etimologia

Etimologia

$$\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$$

Etimologia

$$\gamma\epsilon\omega\text{-}\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$$

Etimologia

$$\gamma\epsilon\omega\text{-}\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$$

geo-metria

Etimologia

$\gamma\epsilon\omega$-$\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$

geo-metria

Terra-medição

Euclides de Alexandria (323-283 AEC)

Euclides de Alexandria (323-283 AEC)

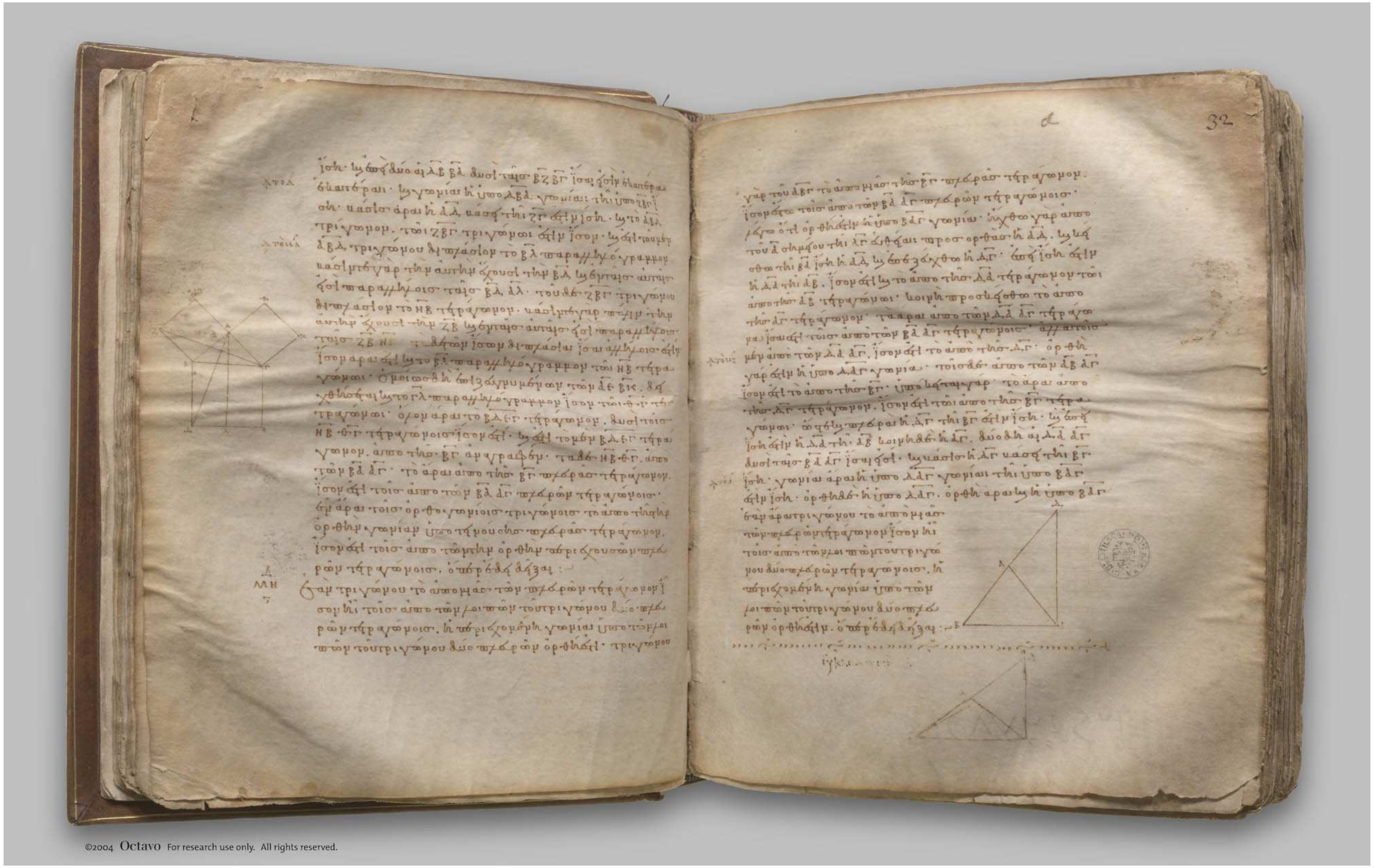
Euclides de Alexandria (323-283 AEC)

- Provável aluno da célebre *Academia* de Platão, foi o fundador da vigorosa escola matemática de Alexandria. Teve nos *Elementos* sua obra-prima.

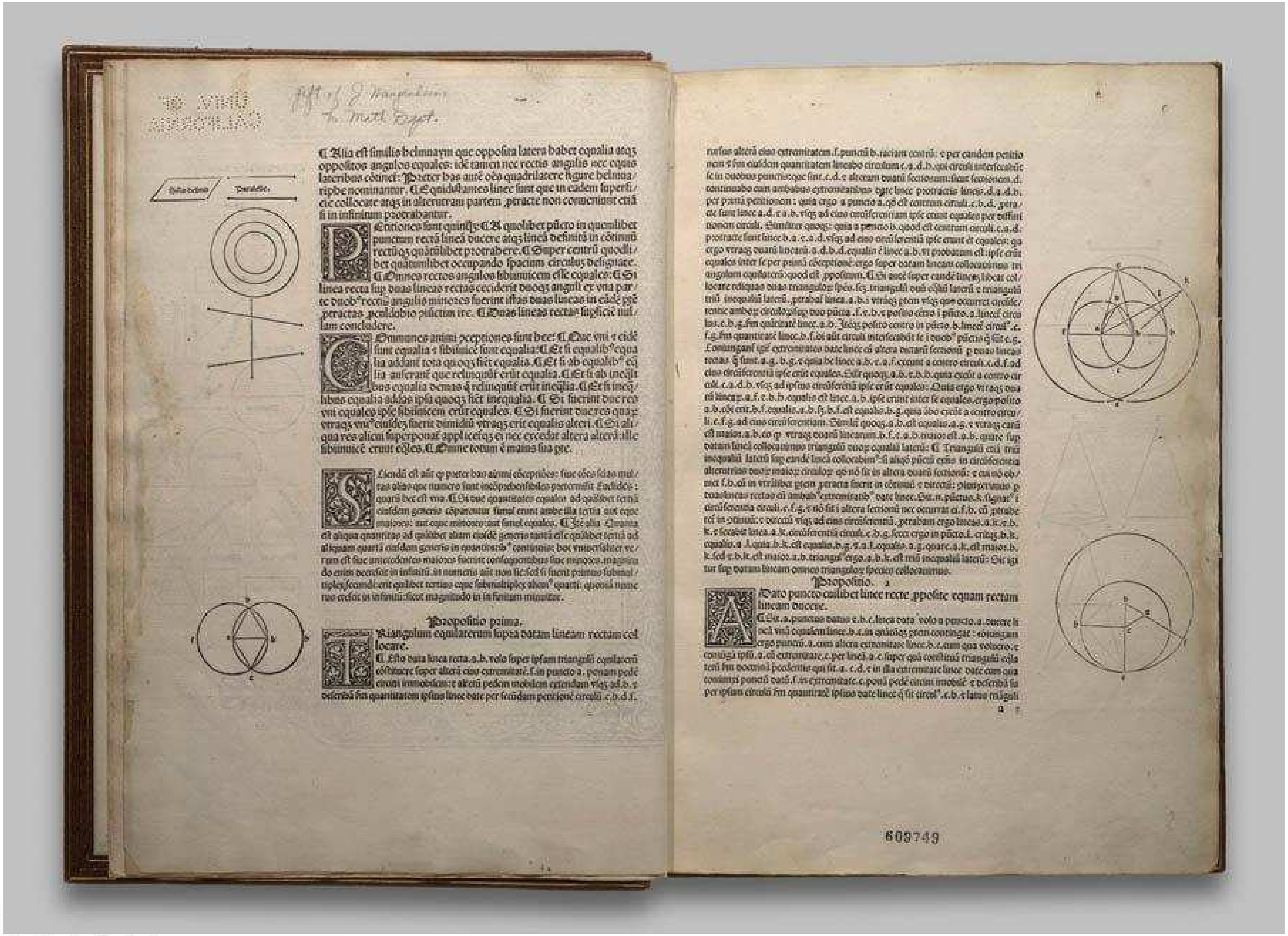
Euclides de Alexandria (323-283 AEC)

- Provável aluno da célebre *Academia* de Platão, foi o fundador da vigorosa escola matemática de Alexandria. Teve nos *Elementos* sua obra-prima.
- Os *Elementos* é provavelmente um dos tratados mais importantes já escritos em toda a história ocidental. Seus treze volumes não apenas sintetizaram toda a matemática de sua época, mas também forneceram um modelo para o desenvolvimento rigoroso das idéias matemáticas que é utilizado até os dias de hoje: inicialmente definições e axiomas são apresentados, então proposições são provadas a partir dessas premissas e de outras proposições através de dedução lógica.

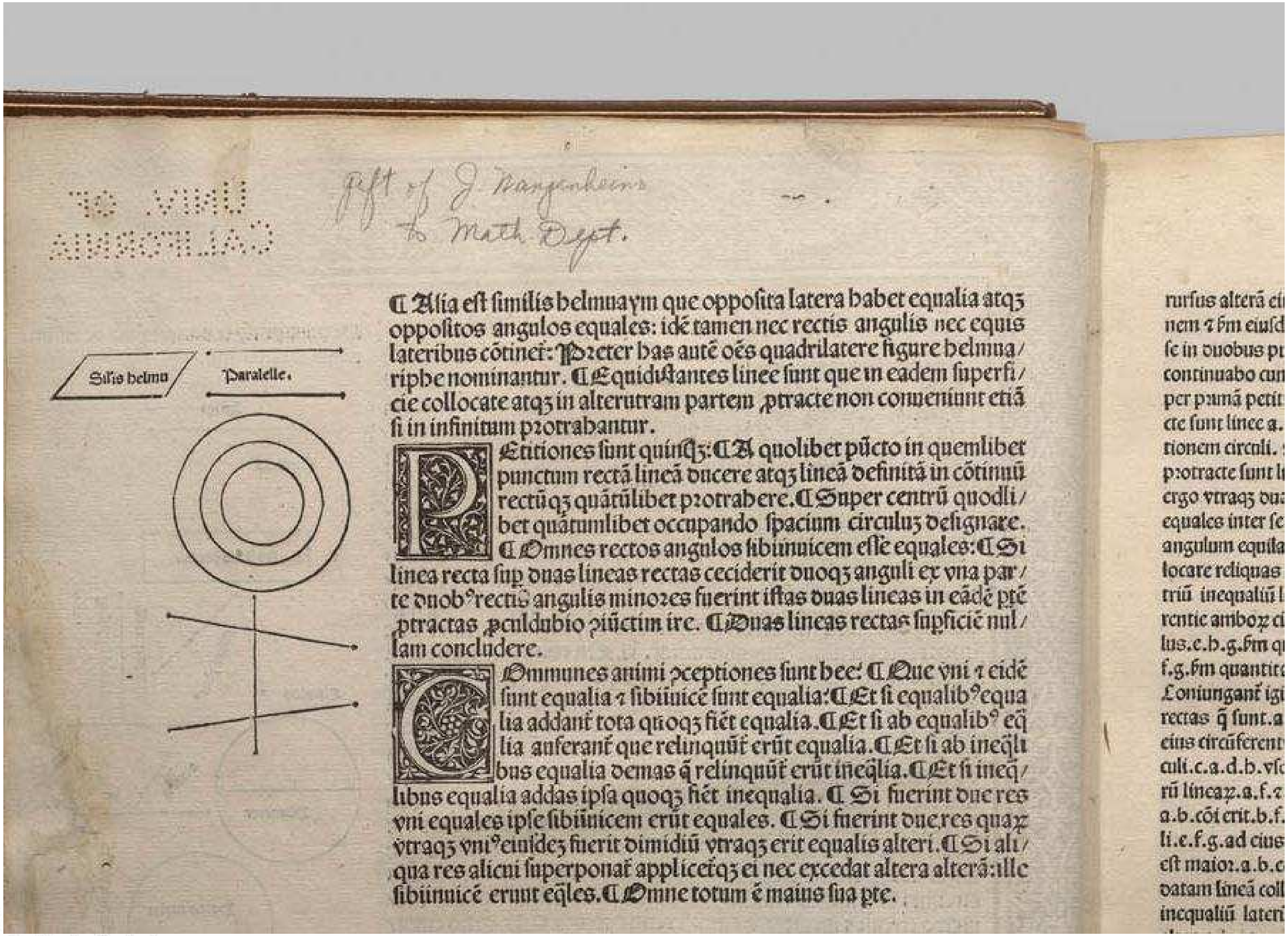
Elementos (Bizantino, 888)



Elementos (Veneza, 1482)



Elementos (Veneza, 1482)



Gift of J. Mangenheim to Math Dept.

¶ Alia est similis helmuaym que opposita latera habet equalia atq3 oppositos angulos equales: idē tamen nec rectis angulis nec equis lateribus cōtinet: Preter has autē oēs quadrilatere figure helmuariphe nominantur. ¶ Equidistantes linee sunt que in eadem superficie collocate atq3 in alterutram partem protracte non conveniunt etiā si in infinitum protrahantur.

Petitiones sunt quinq3: ¶ A quolibet pūcto in quemlibet punctum rectā lineā ducere atq3 lineā definitā in cōtinuū rectūq3 quātūlibet protrahere. ¶ Super centrū quodlibet quātumlibet occupando spacium circulu3 designare. ¶ Omnes rectos angulos sibiinuicem esse equales: ¶ Si linea recta sup duas lineas rectas ceciderit duoq3 anguli ex vna parte duob' rectis angulis minores fuerint istas duas lineas in eādē ptē ptractas pculdubio cōiūctim ire. ¶ Duas lineas rectas supficiē nullam concludere.

Communes animi cōceptiones sunt hee: ¶ Que vni & eidē sunt equalia & sibiinuicē sunt equalia: ¶ Et si equalib' equalia addant tota quoq3 fiēt equalia. ¶ Et si ab equalib' eq̄lia auferant que relinquūt erūt equalia. ¶ Et si ab ineq̄libus equalia demas q̄ relinquūt erūt ineq̄lia. ¶ Et si ineq̄libus equalia addas ipsa quoq3 fiēt inequalia. ¶ Si fuerint due res vni equales ipse sibiinuicem erūt equales. ¶ Si fuerint due res quarū vtraq3 vni' eiusde3 fuerit dimidiū vtraq3 erit equalis alteri. ¶ Si aliqua res alicui superponat applicetq3 ei nec excedat altera alterā: ille sibiinuicē erunt eq̄les. ¶ Omne totum ē maius sua pte.

USP BRASIL

Livro I

Definitions

1. A point is that which has no part.
2. A line is breadthless length.
3. The ends of a line are points.
4. A straight line is a line which lies evenly with the points on itself.
5. A surface is that which has length and breadth only.
6. The edges of a surface are lines.
7. A plane surface is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.
8. A plane angle is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line.
   (...)

23. Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.

Livro I

Postulates

Let the following be postulated:

1. To draw a (unique) straight line from any point to any point.
2. To produce a finite straight line continuously in a straight line.
3. To describe a circle with any center and radius.
4. That all right angles equal one another.
5. That, if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.

Common Notions

1. Things which equal the same thing also equal one another.
2. If equals are added to equals, then the wholes are equal.
   (...)

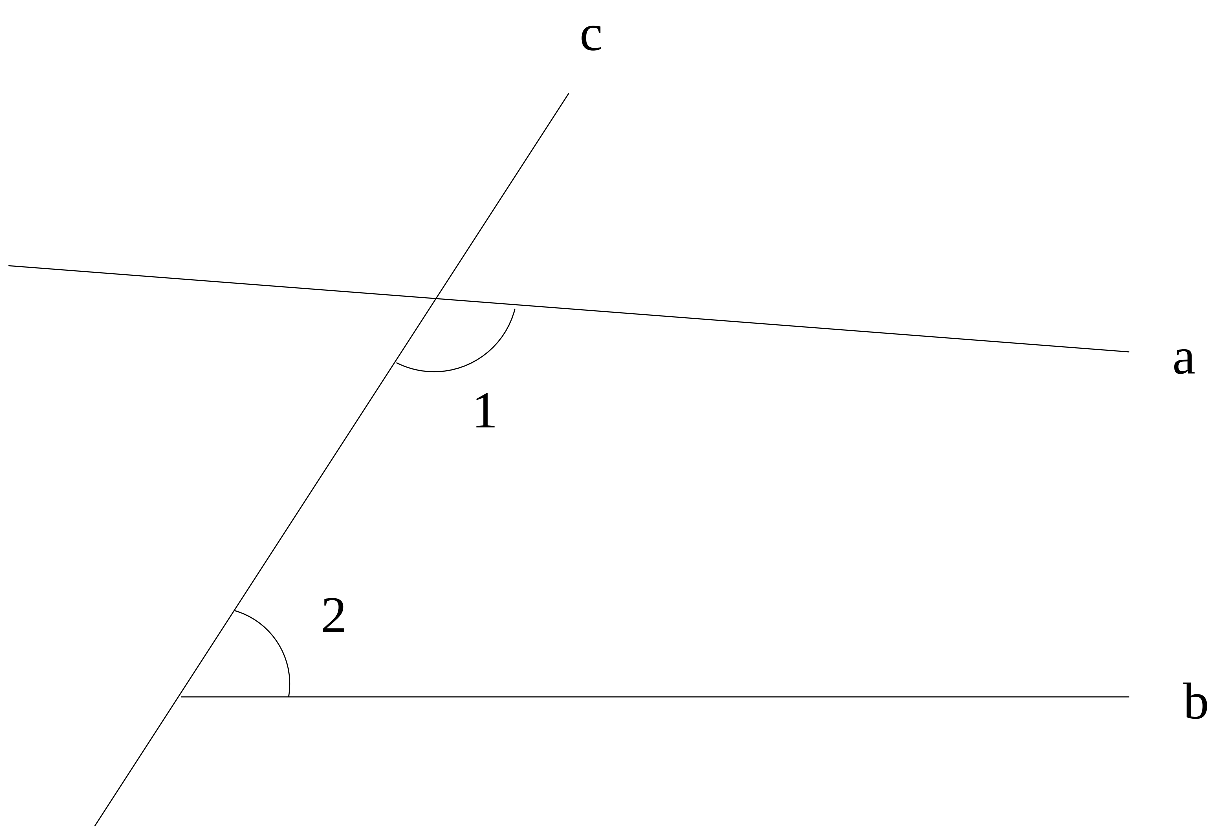
O Postulado V de Euclides

O Postulado V de Euclides

É verdade que, se uma reta corta outras duas retas formando ângulos internos do mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas se continuadas indefinidamente encontrar-se-ão do lado em que estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

O Postulado V de Euclides

É verdade que, se uma reta corta outras duas retas formando ângulos internos do mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas se continuadas indefinidamente encontrar-se-ão do lado em que estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.



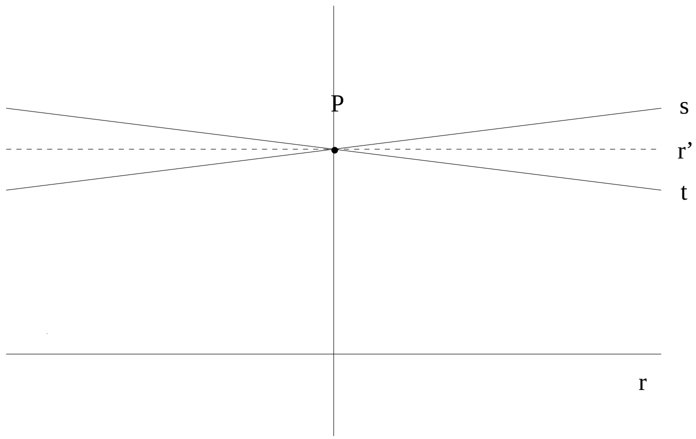
O Postulado V de Euclides

O Postulado V de Euclides

Lembremos que duas retas são chamadas de paralelas se elas não têm pontos em comum. As seguintes asserções são equivalentes ao Postulado V de Euclides:

O Postulado V de Euclides

Lembremos que duas retas são chamadas de paralelas se elas não têm pontos em comum. As seguintes asserções são equivalentes ao Postulado V de Euclides:

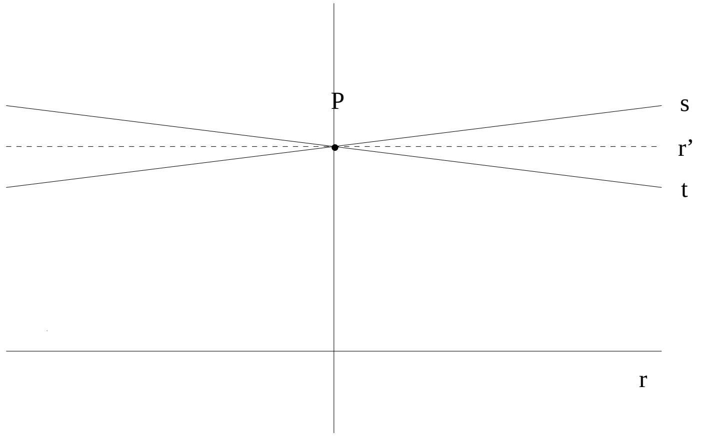


- Por um ponto fora de uma reta dada, é possível traçar-se uma única reta paralela à reta dada (Proclus, Playfair).

O Postulado V de Euclides

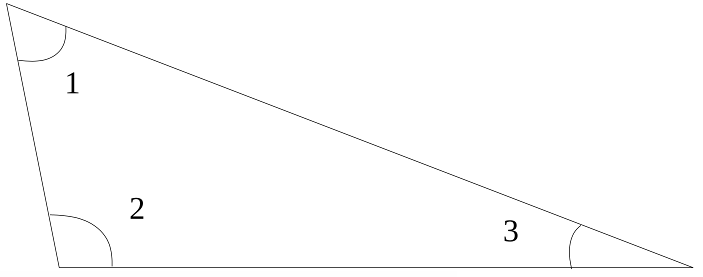
Lembremos que duas retas são chamadas de paralelas se elas não têm pontos em comum. As seguintes asserções são equivalentes ao Postulado V de Euclides:

- Por um ponto fora de uma reta dada, é possível traçar-se uma única reta paralela à reta dada (Proclus, Playfair).



- A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos (Legendre).

$< 1 + < 2 + < 3 = 180$



Tentativas de “provar” o Postulado V

Tentativas de “provar” o Postulado V

- Antiguidade: Arquimedes (tratado perdido: teoria de paralelas), Claudius Ptolomeu (83-161), Proclus (410–485)

Tentativas de “provar” o Postulado V

- Antiguidade: Arquimedes (tratado perdido: teoria de paralelas), Claudius Ptolomeu (83-161), Proclus (410–485)
- Translações em árabe de tentativas bizantinas: Aghānīs (séc. V), Simplício (séc. VI)

Tentativas de “provar” o Postulado V

- Antiguidade: Arquimedes (tratado perdido: teoria de paralelas), Claudius Ptolomeu (83-161), Proclus (410–485)
- Translações em árabe de tentativas bizantinas: Aghānīs (séc. V), Simplício (séc. VI)
- Oriente medieval: Al-Jawharī (Bagdad, séc. IX), Ibn Qurra, Al-Nayrīzī (séc. X), Ibn Sīnā (980–1037), Ibn al-Haytham (Egito, 965–1041)

Tentativas de "provar" o Postulado V

- Antiguidade: Arquimedes (tratado perdido: teoria de paralelas), Claudius Ptolomeu (83-161), Proclus (410–485)
- Translações em árabe de tentativas bizantinas: Aghānīs (séc. V), Simplício (séc. VI)
- Oriente medieval: Al-Jawharī (Bagdad, séc. IX), Ibn Qurra, Al-Nayrīzī (séc. X), Ibn Sīnā (980–1037), Ibn al-Haytham (Egito, 965–1041)
- Umar Khayyām (Pérsia)

Tentativas de "provar" o Postulado V

- Antiguidade: Arquimedes (tratado perdido: teoria de paralelas), Claudius Ptolomeu (83-161), Proclus (410–485)
- Translações em árabe de tentativas bizantinas: Aghānīs (séc. V), Simplício (séc. VI)
- Oriente medieval: Al-Jawharī (Bagdad, séc. IX), Ibn Qurra, Al-Nayrīzī (séc. X), Ibn Sīnā (980–1037), Ibn al-Haytham (Egito, 965–1041)
- Umar Khayyām (Pérsia)
- Séc. XIII: Al Dīn al-Sālār, Al Dīn al-Tūsī, Al-Hanafī, Al-Abhārī, Al-Maghribī

Tentativas de “provar” o Postulado V

- Antiguidade: Arquimedes (tratado perdido: teoria de paralelas), Claudius Ptolomeu (83-161), Proclus (410–485)
- Translações em árabe de tentativas bizantinas: Aghānīs (séc. V), Simplício (séc. VI)
- Oriente medieval: Al-Jawharī (Bagdad, séc. IX), Ibn Qurra, Al-Nayrīzī (séc. X), Ibn Sīnā (980–1037), Ibn al-Haytham (Egito, 965–1041)
- Umar Khayyām (Pérsia)
- Séc. XIII: Al Dīn al-Sālār, Al Dīn al-Tūsī, Al-Hanafī, Al-Abhārī, Al-Maghribī
- Europa medieval: Vitello (Polônia, 1230?–1275?), Levi ben Gerson (sul da França, 1288–1344, em hebraico), Alfonso de Valladolid? (Espanha, 1270–1346, em ladino)

Tentativas de “provar” o Postulado V

- Séc XVI: Grisogono (Zadar e Itália, 1472–1538, em latim), Clavius (Bamberg e Roma, 1537–1612)

Tentativas de “provar” o Postulado V

- Séc XVI: Grisogono (Zadar e Itália, 1472–1538, em latim), Clavius (Bamberg e Roma, 1537–1612)
- Séc XVII: Cataldi (Itália, 1548–1626), Borelli (1608–1679), Giordano (1633–1711), Wallis (1616–1703, Professor em Oxford)

Tentativas de "provar" o Postulado V

- Séc XVI: Grisogono (Zadar e Itália, 1472–1538, em latim), Clavius (Bamberg e Roma, 1537–1612)
- Séc XVII: Cataldi (Itália, 1548–1626), Borelli (1608–1679), Giordano (1633–1711), Wallis (1616–1703, Professor em Oxford)
- Séc XVIII: Saccheri (1667–1733), Lambert (Mulhouse, Munique e Berlim, 1728–1777), Bertrand (Suíça, 1731–1812, aluno de Euler), Legendre (França, 1752–1833), Gur´ev (Rússia, 1746–1813)

Tentativas de "provar" o Postulado V

- Séc XVI: Grisogono (Zadar e Itália, 1472–1538, em latim), Clavius (Bamberg e Roma, 1537–1612)
- Séc XVII: Cataldi (Itália, 1548–1626), Borelli (1608–1679), Giordano (1633–1711), Wallis (1616–1703, Professor em Oxford)
- Séc XVIII: Saccheri (1667–1733), Lambert (Mulhouse, Munique e Berlim, 1728–1777), Bertrand (Suíça, 1731–1812, aluno de Euler), Legendre (França, 1752–1833), Gur´ev (Rússia, 1746–1813)
- Farkas Bolyai (Transilvânia, 1755–1856): aluno de Gauss em Göttingen, pai de János Bolyai

A descoberta das geometrias não-Euclideanas

A descoberta das geometrias não-Euclideanas

- Nikolai I. Lobachevsky (1792–1856), Professor na Universidade de Kazan, motivado pelos trabalhos fracassados em provar o Postulado V (notadamente aquele de Legendre) publica em 1829 o primeiro trabalho (*Sobre os princípios da geometria*, em russo) construindo uma geometria baseada em um postulado em conflito direto com o Postulado V:

A descoberta das geometrias não-Euclideanas

- Nikolai I. Lobachevsky (1792–1856), Professor na Universidade de Kazan, motivado pelos trabalhos fracassados em provar o Postulado V (notadamente aquele de Legendre) publica em 1829 o primeiro trabalho (*Sobre os princípios da geometria*, em russo) construindo uma geometria baseada em um postulado em conflito direto com o Postulado V:
- Por um ponto fora de uma reta, é possível traçar-se mais de uma reta paralela à reta dada.

A descoberta das geometrias não-Euclideanas

- Nikolai I. Lobachevsky (1792–1856), Professor na Universidade de Kazan, motivado pelos trabalhos fracassados em provar o Postulado V (notadamente aquele de Legendre) publica em 1829 o primeiro trabalho (*Sobre os princípios da geometria*, em russo) construindo uma geometria baseada em um postulado em conflito direto com o Postulado V:
- Por um ponto fora de uma reta, é possível traçar-se mais de uma reta paralela à reta dada.
- *What Vesalius was to Galen, what Copernicus was to Ptolomy, that was Lobatchewsky to Euclid.* (W. K. Clifford, 1873)

A descoberta das geometrias não-Euclideanas

A descoberta das geometrias não-Euclideanas

- Janos Bolyai (1802–1860), colega de estudos de Gauss, Professor na Hungria, inicia-se através do pai no estudo da teoria das paralelas tentando demonstrar o Postulado V.

A descoberta das geometrias não-Euclideanas

- Janos Bolyai (1802–1860), colega de estudos de Gauss, Professor na Hungria, inicia-se através do pai no estudo da teoria das paralelas tentando demonstrar o Postulado V.
- Após o insucesso, muda a direção de sua pequisa e concentra-se em estabelecer as propriedades comuns às geometrias Euclideanas e não-Euclideanas, a saber, a *geometria absoluta*.

A descoberta das geometrias não-Euclideanas

- Janos Bolyai (1802–1860), colega de estudos de Gauss, Professor na Hungria, inicia-se através do pai no estudo da teoria das paralelas tentando demonstrar o Postulado V.
- Após o insucesso, muda a direção de sua pequisa e concentra-se em estabelecer as propriedades comuns às geometrias Euclideanas e não-Euclideanas, a saber, a *geometria absoluta*.
- É exortado pelo pai a publicar seus resultados com rapidez para não perder a prioridade das descobertas. Suas idéias saem no apêndice de um livro publicado pelo pai em 1831. Em seguida, este envia uma cópia a Gauss que responde:

A descoberta das geometrias não-Euclideanas

- Janos Bolyai (1802–1860), colega de estudos de Gauss, Professor na Hungria, inicia-se através do pai no estudo da teoria das paralelas tentando demonstrar o Postulado V.
- Após o insucesso, muda a direção de sua pequisa e concentra-se em estabelecer as propriedades comuns às geometrias Euclideanas e não-Euclideanas, a saber, a *geometria absoluta*.
- É exortado pelo pai a publicar seus resultados com rapidez para não perder a prioridade das descobertas. Suas idéias saem no apêndice de um livro publicado pelo pai em 1831. Em seguida, este envia uma cópia a Gauss que responde:
- "(...) louvar esse trabalho seria louvar a mim mesmo (...)"

Conseqüências

Conseqüências

- Para os gregos, o espaço físico era uma entidade absoluta, a realização direta de um objeto Platônico. A geometria Euclideana era a ciência do espaço físico e portanto a única geometria possível e aquela “verdadeira”, e constituia-se do estudo de propriedades das figuras geométricas mergulhadas nesse espaço. Este ponto de vista perdurou essencialmente até o séc. XIX.

Conseqüências

- Para os gregos, o espaço físico era uma entidade absoluta, a realização direta de um objeto Platônico. A geometria Euclideana era a ciência do espaço físico e portanto a única geometria possível e aquela "verdadeira", e constituia-se do estudo de propriedades das figuras geométricas mergulhadas nesse espaço. Este ponto de vista perdurou essencialmente até o séc. XIX.
- Com a descobertas de Lobachevsky e Bolyai, não apenas a geometria Euclideana deixa de ser a única possível, mas também, deixa de ser aquela "verdadeira". Eventualmente, o próprio espaço passa a ser uma entidade passível de estudo geométrico.

Conseqüências

- Para os gregos, o espaço físico era uma entidade absoluta, a realização direta de um objeto Platônico. A geometria Euclideana era a ciência do espaço físico e portanto a única geometria possível e aquela "verdadeira", e constituia-se do estudo de propriedades das figuras geométricas mergulhadas nesse espaço. Este ponto de vista perdurou essencialmente até o séc. XIX.
- Com a descobertas de Lobachevsky e Bolyai, não apenas a geometria Euclideana deixa de ser a única possível, mas também, deixa de ser aquela "verdadeira". Eventualmente, o próprio espaço passa a ser uma entidade passível de estudo geométrico.
- Termina assim uma época na história da matemática que fora inaugurada dois mil anos antes, originando-se uma transformação profunda não apenas do pensamento matemático, mas também de pensamento teórico em geral que influenciará nossa concepção do universo e do mundo físico.

Conseqüências

- Para os gregos, o espaço físico era uma entidade absoluta, a realização direta de um objeto Platônico. A geometria Euclideana era a ciência do espaço físico e portanto a única geometria possível e aquela "verdadeira", e constituia-se do estudo de propriedades das figuras geométricas mergulhadas nesse espaço. Este ponto de vista perdurou essencialmente até o séc. XIX.
- Com a descobertas de Lobachevsky e Bolyai, não apenas a geometria Euclideana deixa de ser a única possível, mas também, deixa de ser aquela "verdadeira". Eventualmente, o próprio espaço passa a ser uma entidade passível de estudo geométrico.
- Termina assim uma época na história da matemática que fora inaugurada dois mil anos antes, originando-se uma transformação profunda não apenas do pensamento matemático, mas também de pensamento teórico em geral que influenciará nossa concepção do universo e do mundo físico.
- Apesar disso, as geometrias não-Euclideanas permaneceram um tanto marginais por várias décadas antes de serem completamente integradas. Para entender isso, retornemos um pouco no tempo para entender outro aspecto da geometria que estava surgindo...

Os primórdios da geometria diferencial

Os primórdios da geometria diferencial

- A GD inicia-se com o estudo de curvas; retas tangentes a curvas já são discutidas pelos antigos: Euclides, Arquimedes e Apolônio.

Os primórdios da geometria diferencial

- A GD inicia-se com o estudo de curvas; retas tangentes a curvas já são discutidas pelos antigos: Euclides, Arquimedes e Apolônio.
- No século XVII:

Pierre de Fermat (1601–1665)

René Descartes (1596–1650)

criam a *geometria analítica*, enquanto que

Os primórdios da geometria diferencial

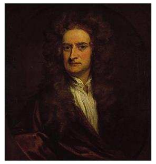
- A GD inicia-se com o estudo de curvas; retas tangentes a curvas já são discutidas pelos antigos: Euclides, Arquimedes e Apolônio.
- No século XVII:

Pierre de Fermat (1601–1665)

René Descartes (1596–1650)

criam a *geometria analítica*, enquanto que

Gottfried von Leibniz (1646–1716)



Isaac Newton (1643–1727)

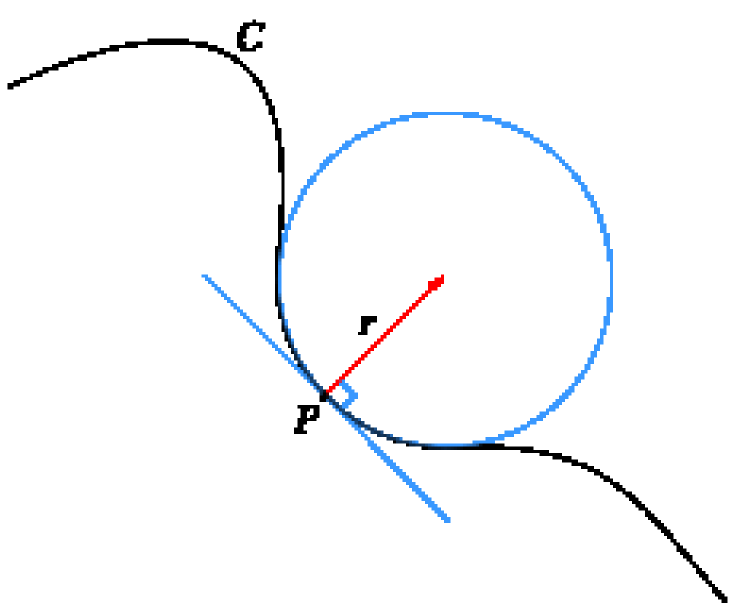
descobrem os algoritmos do *cálculo infinitesimal*.

Curvatura de curvas planas

Apesar destes serem conhecidos por Leibniz e Newton, C. Huygens (1629–1695), motivado pelo seu interesse em pêndulos e relógios, talvez tenha sido o precursor dos conceitos de círculo osculador e curvatura de uma curva plana.

Curvatura de curvas planas

Apesar destes serem conhecidos por Leibniz e Newton, C. Huygens (1629–1695), motivado pelo seu interesse em pêndulos e relógios, talvez tenha sido o precursor dos conceitos de círculo osculador e curvatura de uma curva plana.

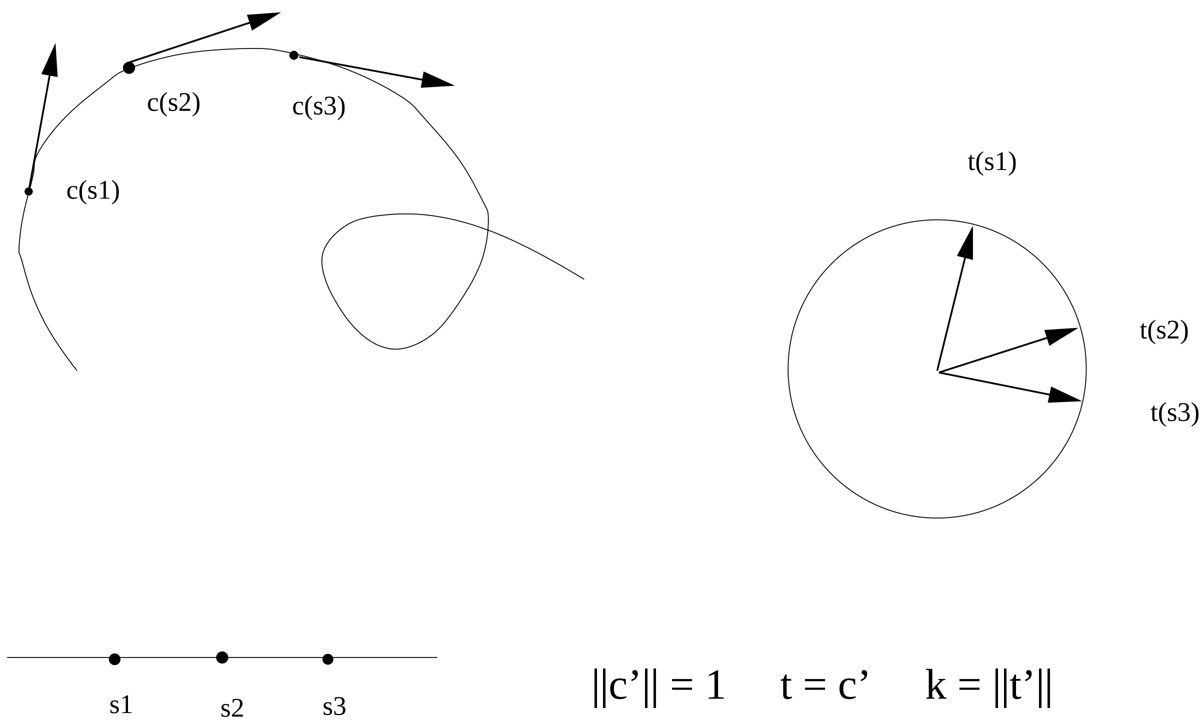


$$k = \frac{1}{r}$$

Osculating circle

Curvatura de curvas planas

Apesar destes serem conhecidos por Leibniz e Newton, C. Huygens (1629–1695), motivado pelo seu interesse em pêndulos e relógios, talvez tenha sido o precursor dos conceitos de círculo osculador e curvatura de uma curva plana.



$\|c'\| = 1 \quad t = c' \quad k = \|t'\|$

Os primórdios da geometria diferencial

Os primórdios da geometria diferencial

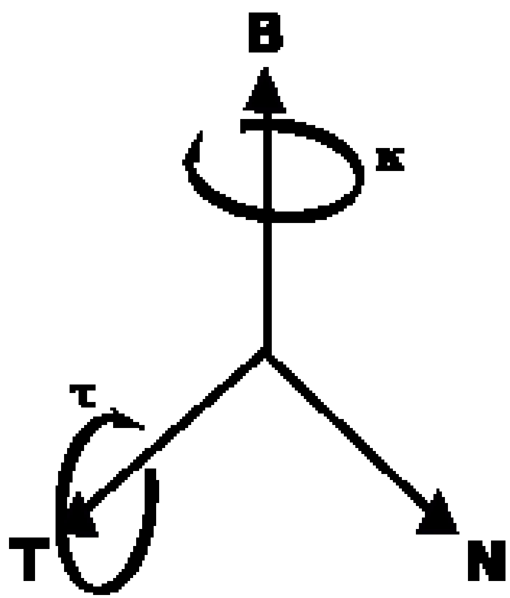
- Durante o séc. XVIII e até o início do séc. XIX, desenvolvem-se os fundamentos da teoria de curvas e superfícies mergulhadas no espaço tri-dimensional.

Os primórdios da geometria diferencial

- Durante o séc. XVIII e até o início do séc. XIX, desenvolvem-se os fundamentos da teoria de curvas e superfícies mergulhadas no espaço tri-dimensional.
- Curvas espaciais são estudadas por Alexis Clairaut (1713–1765, propriedades de primeira ordem) e Gaspard Monge (1746–1818, curvatura e torção).

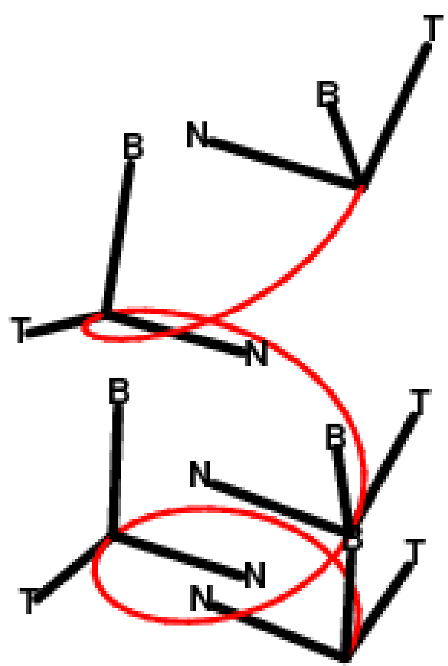
Os primórdios da geometria diferencial

- Durante o séc. XVIII e até o início do séc. XIX, desenvolvem-se os fundamentos da teoria de curvas e superfícies mergulhadas no espaço tri-dimensional.
- Curvas espaciais são estudadas por Alexis Clairaut (1713–1765, propriedades de primeira ordem) e Gaspard Monge (1746–1818, curvatura e torção).



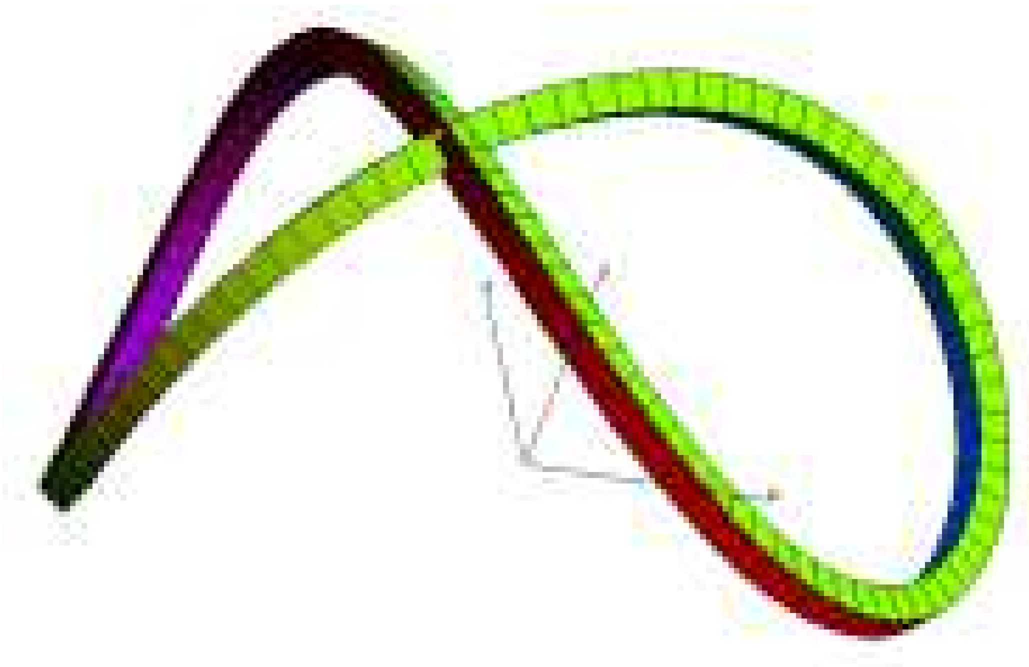
Os primórdios da geometria diferencial

- Durante o séc. XVIII e até o início do séc. XIX, desenvolvem-se os fundamentos da teoria de curvas e superfícies mergulhadas no espaço tri-dimensional.
- Curvas espaciais são estudadas por Alexis Clairaut (1713–1765, propriedades de primeira ordem) e Gaspard Monge (1746–1818, curvatura e torção).



Os primórdios da geometria diferencial

- Durante o séc. XVIII e até o início do séc. XIX, desenvolvem-se os fundamentos da teoria de curvas e superfícies mergulhadas no espaço tri-dimensional.
- Curvas espaciais são estudadas por Alexis Clairaut (1713–1765, propriedades de primeira ordem) e Gaspard Monge (1746–1818, curvatura e torção).



Viviani curve

Os primórdios da geometria diferencial

- Durante o séc. XVIII e até o início do séc. XIX, desenvolvem-se os fundamentos da teoria de curvas e superfícies mergulhadas no espaço tri-dimensional.
- Curvas espaciais são estudadas por Alexis Clairaut (1713–1765, propriedades de primeira ordem) e Gaspard Monge (1746–1818, curvatura e torção).
- Uma transição natural da teoria de curvas para a teoria de superfícies encontra-se no *problema geodésico* — isto é o problema de encontrar-se o caminho mais curto entre dois pontos dados em uma superfície — que foi independentemente resolvido pelos irmãos Bernoulli, Jakob (1654–1705) e Johannes (1767-1748).

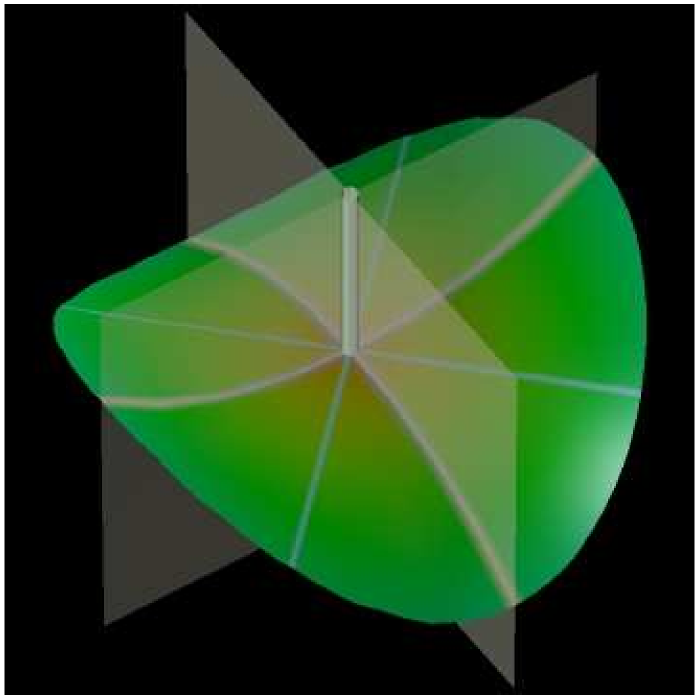
Leonhard Euler (1707–1783)

Leonhard Euler (1707–1783)

Leonhard Euler (1707–1783)

- Suiço, aluno de Johannes Bernoulli, figura dominante no séc. XVIII.

Leonhard Euler (1707–1783)



Curvaturas principais

- Suiço, aluno de Johannes Bernoulli, figura dominante no séc. XVIII.
- Sua maior contribuição à GD talvez tenha sido o estudo da curvatura das seções normais planas de uma superfície.

Leonhard Euler (1707–1783)

- Suiço, aluno de Johannes Bernoulli, figura dominante no séc. XVIII.
- Sua maior contribuição à GD talvez tenha sido o estudo da curvatura das seções normais planas de uma superfície.
- Em 1772, descobre que uma condição necessária para que uma superfície possa ser desenvolvida sobre um plano sem distorção é que ela seja folheada por retas.

Leonhard Euler (1707–1783)

- Suiço, aluno de Johannes Bernoulli, figura dominante no séc. XVIII.
- Sua maior contribuição à GD talvez tenha sido o estudo da curvatura das seções normais planas de uma superfície.
- Em 1772, descobre que uma condição necessária para que uma superfície possa ser desenvolvida sobre um plano sem distorção é que ela seja folheada por retas.
- *Et quia per naturum superficierum quaelibet coordinata debet esse functio binarium variabilium.*
  Esse é o reconhecimento do fato das coordenadas (x, y, z) dos pontos de uma superfície serem funções de duas variáveis.

Charles Dupin(1784–1873) e Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Charles Dupin(1784–1873) e Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Dupin

- Aluno de Monge e continuador de sua obra sob cuja direção descobre as famosas *cíclides de Dupin*. Seu livro *Développments de géométrie* (1813) contém diversas contribuições à GD, notadamente a introdução das linhas conjugadas e assintóticas de uma superfície.

Charles Dupin(1784–1873) e Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Dupin

Cauchy

- Aluno de Monge e continuador de sua obra sob cuja direção descobre as famosas *cíclides de Dupin*. Seu livro *Développments de géométrie* (1813) contém diversas contribuições à GD, notadamente a introdução das linhas conjugadas e assintóticas de uma superfície.
- Em *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie* (1826), Cauchy sistematiza cálculos feitos por seus antecessores. Refina o trabalho de Monge sobre a curvatura e a torção de uma curva espacial e chega às fórmulas hoje conhecidas como de Frenet-Serret. Os teoremas de existência e unicidade de EDO devidos a ele permitem mostrar que κ e τ determinam a curva a menos de um movimento rígido.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- Professor em Göttingen, conhecido como "príncipe da matemática", foi a figura dominante em sua época. Sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1827, motivada pelos seus trabalhos práticos em topografia, estabeleceu a forma definitiva da geometria diferencial de superfícies e iniciou uma nova fase de desenvolvimento da matemática no séc. XIX.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- Professor em Göttingen, conhecido como "príncipe da matemática", foi a figura dominante em sua época. Sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1827, motivada pelos seus trabalhos práticos em topografia, estabeleceu a forma definitiva da geometria diferencial de superfícies e iniciou uma nova fase de desenvolvimento da matemática no séc. XIX.
- Para uma superfície $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, ele introduz a *primeira forma fundamental*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

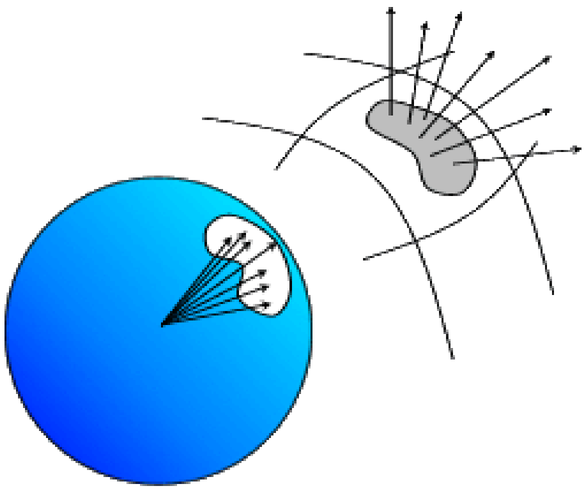
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- Professor em Göttingen, conhecido como "príncipe da matemática", foi a figura dominante em sua época. Sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1827, motivada pelos seus trabalhos práticos em topografia, estabeleceu a forma definitiva da geometria diferencial de superfícies e iniciou uma nova fase de desenvolvimento da matemática no séc. XIX.
- Para uma superfície $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, ele introduz a *primeira forma fundamental*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

a noção de *isometria*,

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

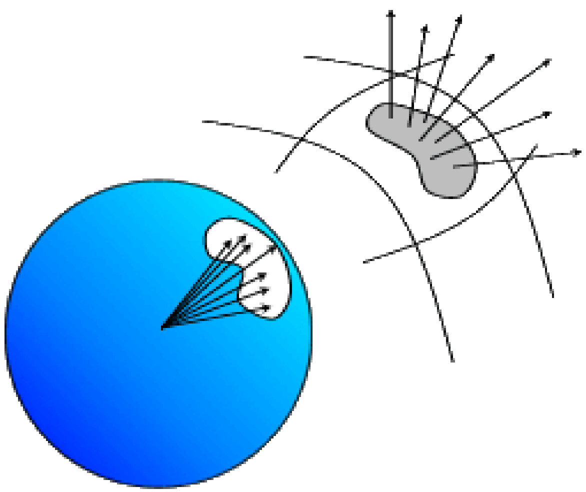


- Professor em Göttingen, conhecido como "príncipe da matemática", foi a figura dominante em sua época. Sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1827, motivada pelos seus trabalhos práticos em topografia, estabeleceu a forma definitiva da geometria diferencial de superfícies e iniciou uma nova fase de desenvolvimento da matemática no séc. XIX.
- Para uma superfície $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, ele introduz a *primeira forma fundamental*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

a noção de *isometria*, a *representação esférica* (hoje chamada de *aplicação de Gauss*),

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

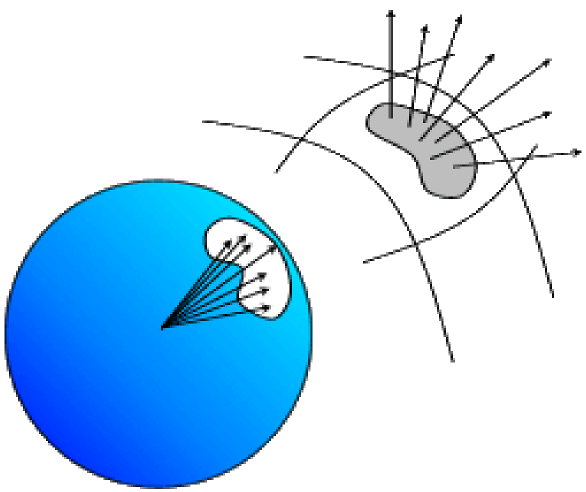


- Professor em Göttingen, conhecido como "príncipe da matemática", foi a figura dominante em sua época. Sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1827, motivada pelos seus trabalhos práticos em topografia, estabeleceu a forma definitiva da geometria diferencial de superfícies e iniciou uma nova fase de desenvolvimento da matemática no séc. XIX.
- Para uma superfície $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, ele introduz a *primeira forma fundamental*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

a noção de *isometria*, a *representação esférica* (hoje chamada de *aplicação de Gauss*), a *segunda forma fundamental*,

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

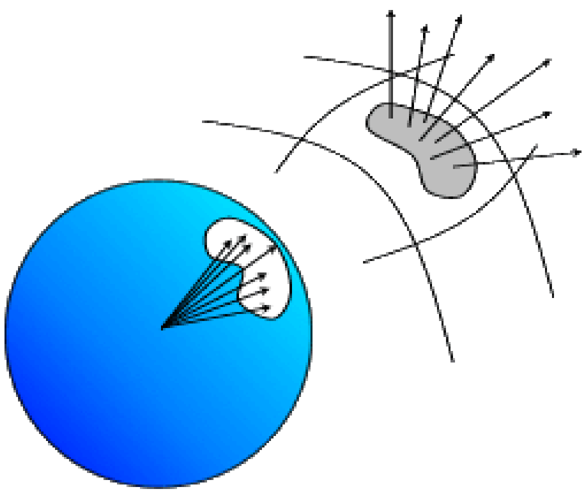


- Professor em Göttingen, conhecido como "príncipe da matemática", foi a figura dominante em sua época. Sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1827, motivada pelos seus trabalhos práticos em topografia, estabeleceu a forma definitiva da geometria diferencial de superfícies e iniciou uma nova fase de desenvolvimento da matemática no séc. XIX.
- Para uma superfície $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, ele introduz a *primeira forma fundamental*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

a noção de *isometria*, a *representação esférica* (hoje chamada de *aplicação de Gauss*), a *segunda forma fundamental*, e a *medida de curvatura* (hoje chamada de *curvatura Gaussiana*.)

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



Gauss map

- Professor em Göttingen, conhecido como "príncipe da matemática", foi a figura dominante em sua época. Sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1827, motivada pelos seus trabalhos práticos em topografia, estabeleceu a forma definitiva da geometria diferencial de superfícies e iniciou uma nova fase de desenvolvimento da matemática no séc. XIX.
- Para uma superfície $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, ele introduz a *primeira forma fundamental*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

a noção de *isometria*, a *representação esférica* (hoje chamada de *aplicação de Gauss*), a *segunda forma fundamental*, e a *medida de curvatura* (hoje chamada de *curvatura Gaussiana*.)

Universidade de São Paulo
B R A S I L

Curvatura Gaussiana

- Olinde Rodrigues (1794–1851) e Euler já haviam notado alguns desses conceitos e resultados, mas é Gauss que percebe toda a sua importância.

Curvatura Gaussiana

- Olinde Rodrigues (1794–1851) e Euler já haviam notado alguns desses conceitos e resultados, mas é Gauss que percebe toda a sua importância.
- Seja então $g : S \to S^2(1)$ a aplicação de Gauss definida por $g : p \to N(p)$. Então a curvatura Gaussiana no ponto p é

$$K(p) = \det(dg_p) = \pm \lim_{U \searrow p} \frac{\text{área } g(U)}{\text{área } U}.$$

Curvatura Gaussiana

- Olinde Rodrigues (1794–1851) e Euler já haviam notado alguns desses conceitos e resultados, mas é Gauss que percebe toda a sua importância.
- Seja então $g : S \to S^2(1)$ a aplicação de Gauss definida por $g : p \to N(p)$. Então a curvatura Gaussiana no ponto p é

$$K(p) = \det(dg_p) = \pm \lim_{U \searrow p} \frac{\text{área } g(U)}{\text{área } U}.$$

- Segue que $K(p)$ coincide com o produto das curvaturas principais de Euler no ponto p:

$$K = k_1 k_2$$

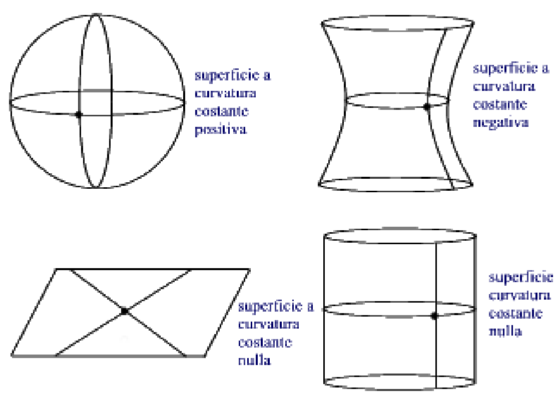
Curvatura Gaussiana

- Olinde Rodrigues (1794–1851) e Euler já haviam notado alguns desses conceitos e resultados, mas é Gauss que percebe toda a sua importância.
- Seja então $g : S \to S^2(1)$ a aplicação de Gauss definida por $g : p \to N(p)$. Então a curvatura Gaussiana no ponto p é

$$K(p) = \det(dg_p) = \pm \lim_{U \searrow p} \frac{\text{área } g(U)}{\text{área } U}.$$

- Segue que $K(p)$ coincide com o produto das curvaturas principais de Euler no ponto p:

$$K = k_1 k_2$$



O teorema notável

O teorema notável

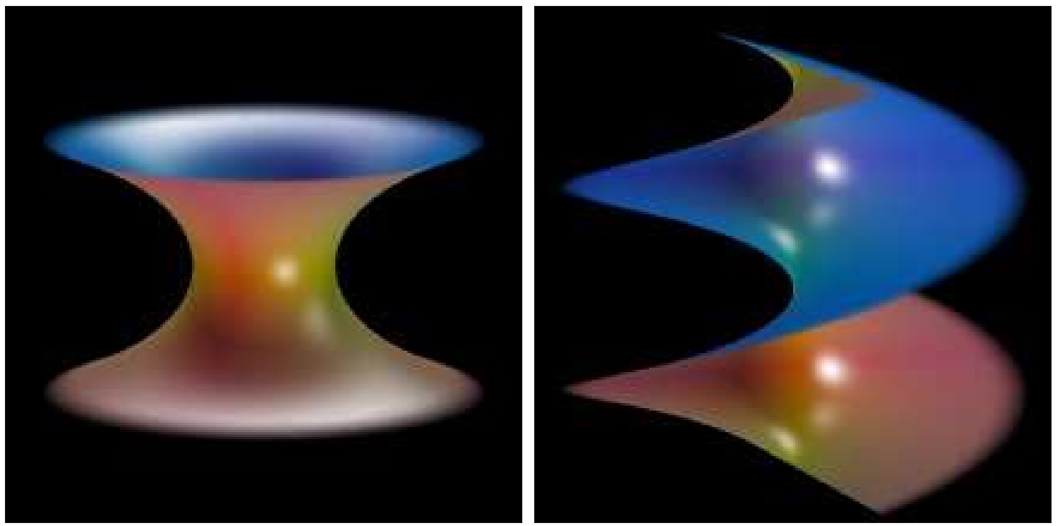
- O principal resultado de *Disquisitiones* é o que Gauss chamou de *Theorema egregium*: a curvatura de uma superfície depende apenas da primeira forma fundamental (e não de como a superfície está mergulhada no espaço ambiente).

O teorema notável

- O principal resultado de *Disquisitiones* é o que Gauss chamou de *Theorema egregium*: a curvatura de uma superfície depende apenas da primeira forma fundamental (e não de como a superfície está mergulhada no espaço ambiente).
- O ponto crucial por trás do *theorema egregium* é o conceito de *geometria intrínseca*.

O teorema notável

- O principal resultado de *Disquisitiones* é o que Gauss chamou de *Theorema egregium*: a curvatura de uma superfície depende apenas da primeira forma fundamental (e não de como a superfície está mergulhada no espaço ambiente).
- O ponto crucial por trás do *theorema egregium* é o conceito de *geometria intrínseca*.



Deformação contínua

Geometria intrínseca

Geometria intrínseca

- A última parte do *Disquisitiones* lida com o estudo das linhas de mais curta distância (ditas *linhas geodésicas*) das superfícies.

Geometria intrínseca

- A última parte do *Disquisitiones* lida com o estudo das linhas de mais curta distância (ditas *linhas geodésicas*) das superfícies.
- O principal resultado é que *o excesso dos ângulos de um triângulo geodésico em relação a dois ângulos retos é igual à área da imagem esférica do triângulo:*

$$\begin{aligned}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi &= \int_{\Delta ABC} K\,dS \\ &= \text{área } g(\Delta ABC)\end{aligned}$$

Gauss e as geometrias não-Euclideanas

Gauss e as geometrias não-Euclideanas

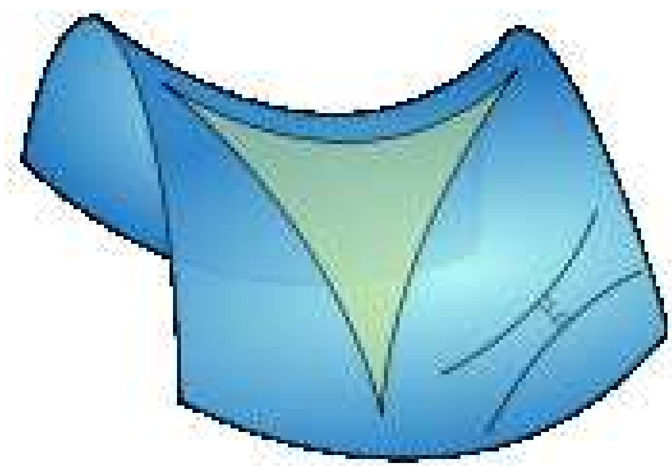
- Para uma superfície S de curvatura *constante* K, o teorema acima implica que
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = K \cdot \text{área } \Delta ABC,$$
quantidade que é positiva, negativa ou nula conforme K o seja. Isso indica que a geomeria intrínseca de S é não-Euclideana se $K \neq 0$.

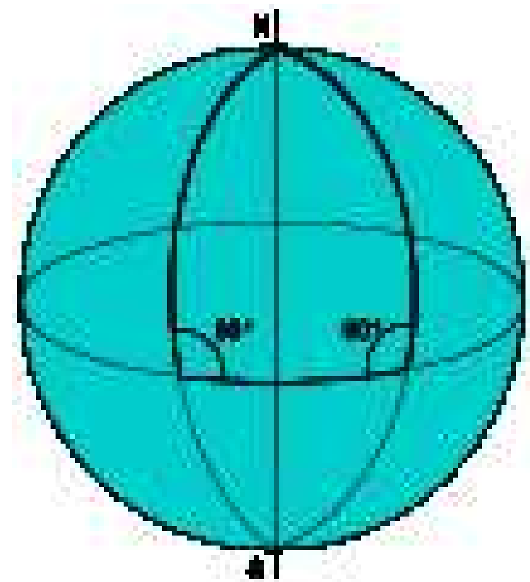
Gauss e as geometrias não-Euclideanas

- Para uma superfície S de curvatura *constante* K, o teorema acima implica que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = K \cdot \text{área}\, \Delta ABC,$$

quantidade que é positiva, negativa ou nula conforme K o seja. Isso indica que a geomeria intrínseca de S é não-Euclideana se $K \neq 0$.





Gauss e as geometrias não-Euclideanas

- Para uma superfície S de curvatura *constante* K, o teorema acima implica que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = K \cdot \text{área } \Delta ABC,$$

  quantidade que é positiva, negativa ou nula conforme K o seja. Isso indica que a geomeria intrínseca de S é não-Euclideana se $K \neq 0$.

- A correspondência particular de Gauss mostra que pelo menos a partir de 1817 ele já estava convencido da existência das geometrias não-Euclideanas, mas não publicou ou divulgou seus resultados. Existe assim um paralelo entre as pesquisas de Gauss sobre a geomeria intrínseca das superfícies e as geometrias não-Euclidenas.

Continuadores da obra de Gauss

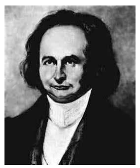
Continuadores da obra de Gauss

Bonnet

- Pierre Bonnet (1819–1892) generalizou o teorema de Gauss sobre a área de um triângulo geodésico. Em 1867, estabeleceu as equações de compatibilidade entre os coefficientes das formas fundamentais e suas derivadas e demonstrou que essas condições são necessárias e suficientes para a existência de uma superfície com esses dados.

Continuadores da obra de Gauss

Bonnet

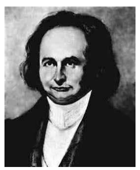


Jacobi

- Pierre Bonnet (1819–1892) generalizou o teorema de Gauss sobre a área de um triângulo geodésico. Em 1867, estabeleceu as equações de compatibilidade entre os coefficientes das formas fundamentais e suas derivadas e demonstrou que essas condições são necessárias e suficientes para a existência de uma superfície com esses dados.
- Carl Jacobi (1804–1851), por volta de 1840, estudou o problema de saber quando um segmento minimizante de geodésica que é prolongado cessa de ser o caminho mais curto entre seus extremos.

Continuadores da obra de Gauss

Bonnet



Jacobi

Minding

- Pierre Bonnet (1819–1892) generalizou o teorema de Gauss sobre a área de um triângulo geodésico. Em 1867, estabeleceu as equações de compatibilidade entre os coefficientes das formas fundamentais e suas derivadas e demonstrou que essas condições são necessárias e suficientes para a existência de uma superfície com esses dados.
- Carl Jacobi (1804–1851), por volta de 1840, estudou o problema de saber quando um segmento minimizante de geodésica que é prolongado cessa de ser o caminho mais curto entre seus extremos.
- Ferdinand Minding (1806–1885), em 1839, mostrou que duas superfícies com curvatura Gaussiana *constante* podem ser transformadas isometricamente uma sobre a outra se e somente as constantes são iguais.

Eugenio Beltrami e a consistência das geometrias não-Euclideanas

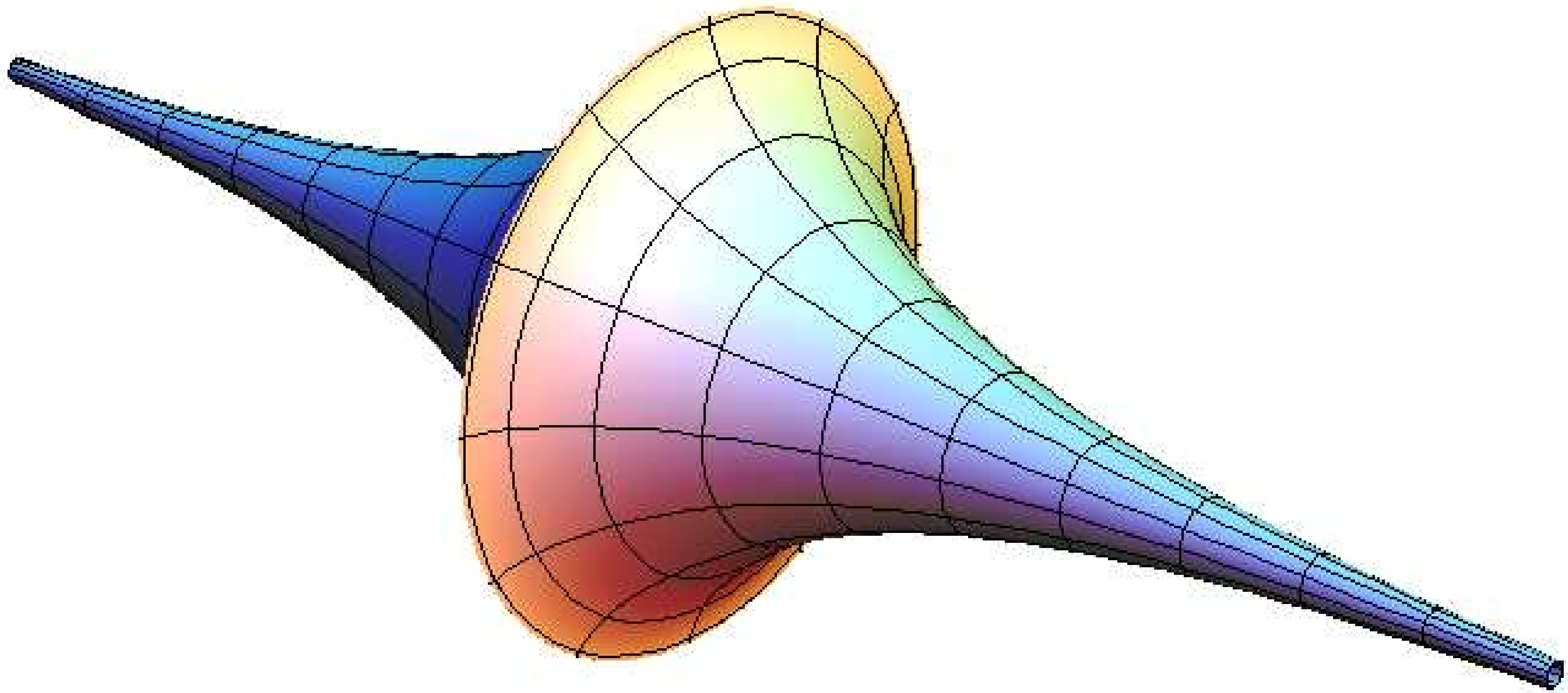
Eugenio Beltrami e a consistência das geometrias não-Euclideanas

- Em outro trabalho de 1840, Minding estabeleceu as relações trigonométricas que devem satisfazer os triângulos geodésicos em superfícies de curvatura constante negativa.

Eugenio Beltrami e a consistência das geometrias não-Euclideanas

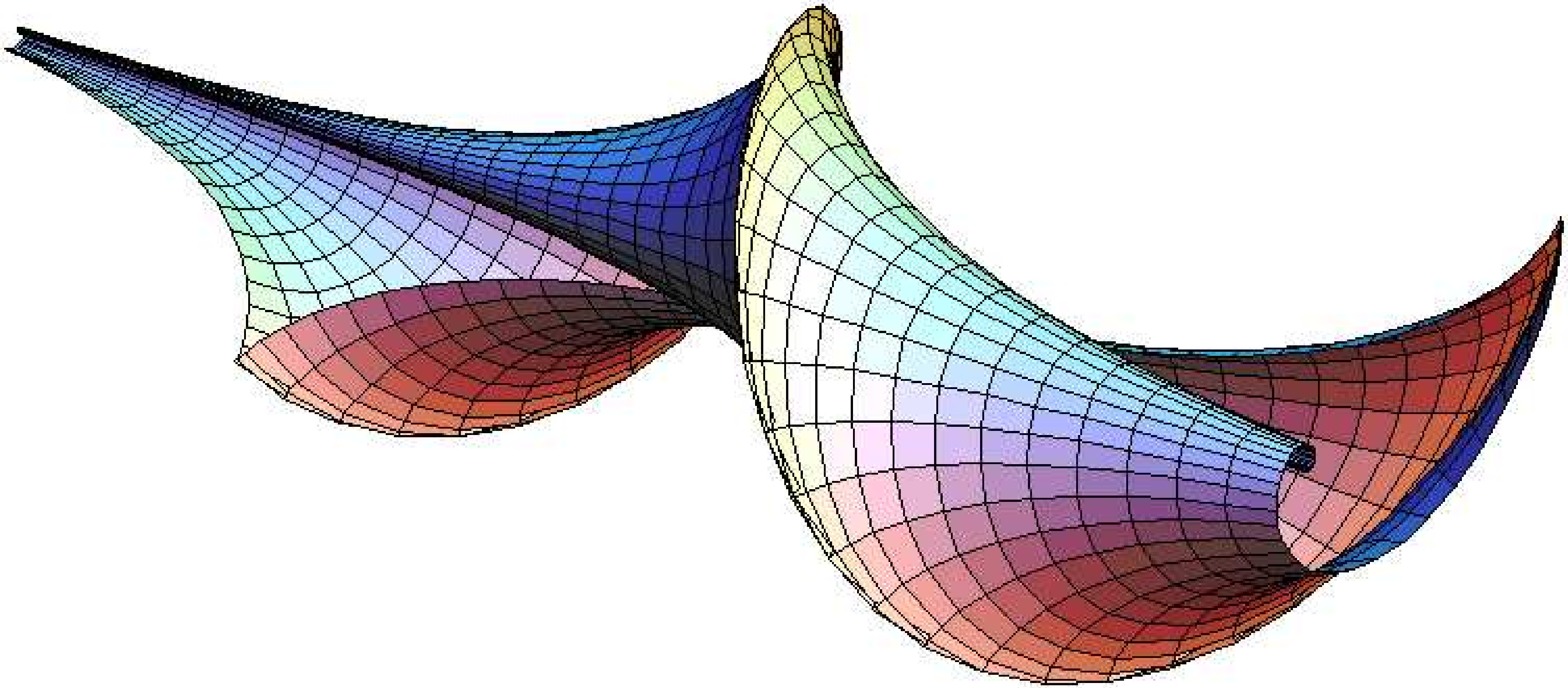
- Em outro trabalho de 1840, Minding estabeleceu as relações trigonométricas que devem satisfazer os triângulos geodésicos em superfícies de curvatura constante negativa.
- Eugenio Beltrami (1835–1900) foi aquele quem percebeu que tais relações coincidem com as relações trigonométricas do plano hiperbólico de Lobachevsky, e assim em *Saggio di interpetazione della geometria non-Euclidea* (1868) construiu o primeiro modelo concreto do plano de Lobachevsky demonstrando a consistência das geometrias não-Euclidenas.

Modelos da geometria hiperbólica



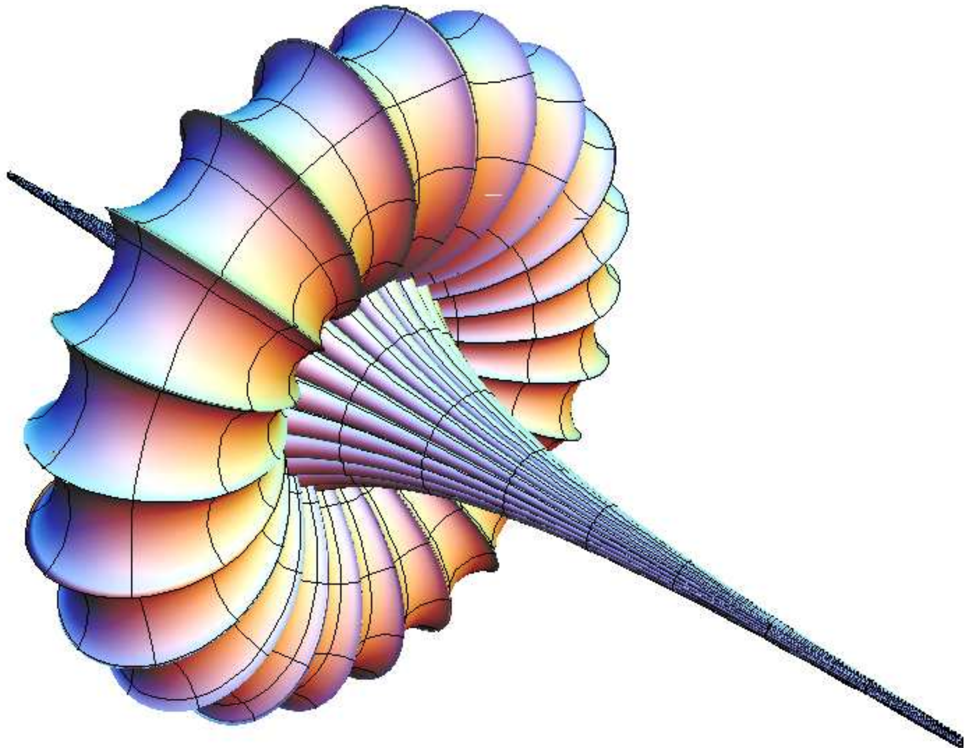
Pseudo-esfera

Modelos da geometria hiperbólica



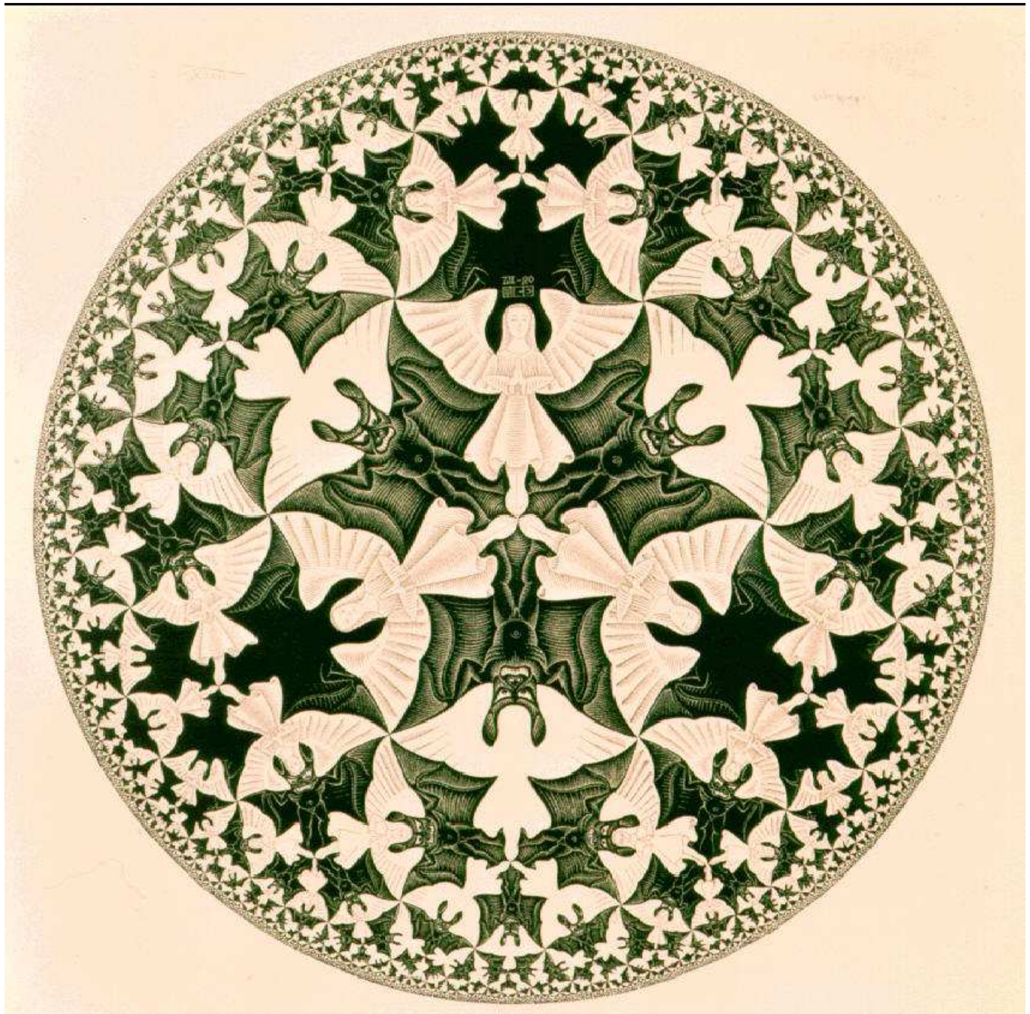
Kink

Modelos da geometria hiperbólica



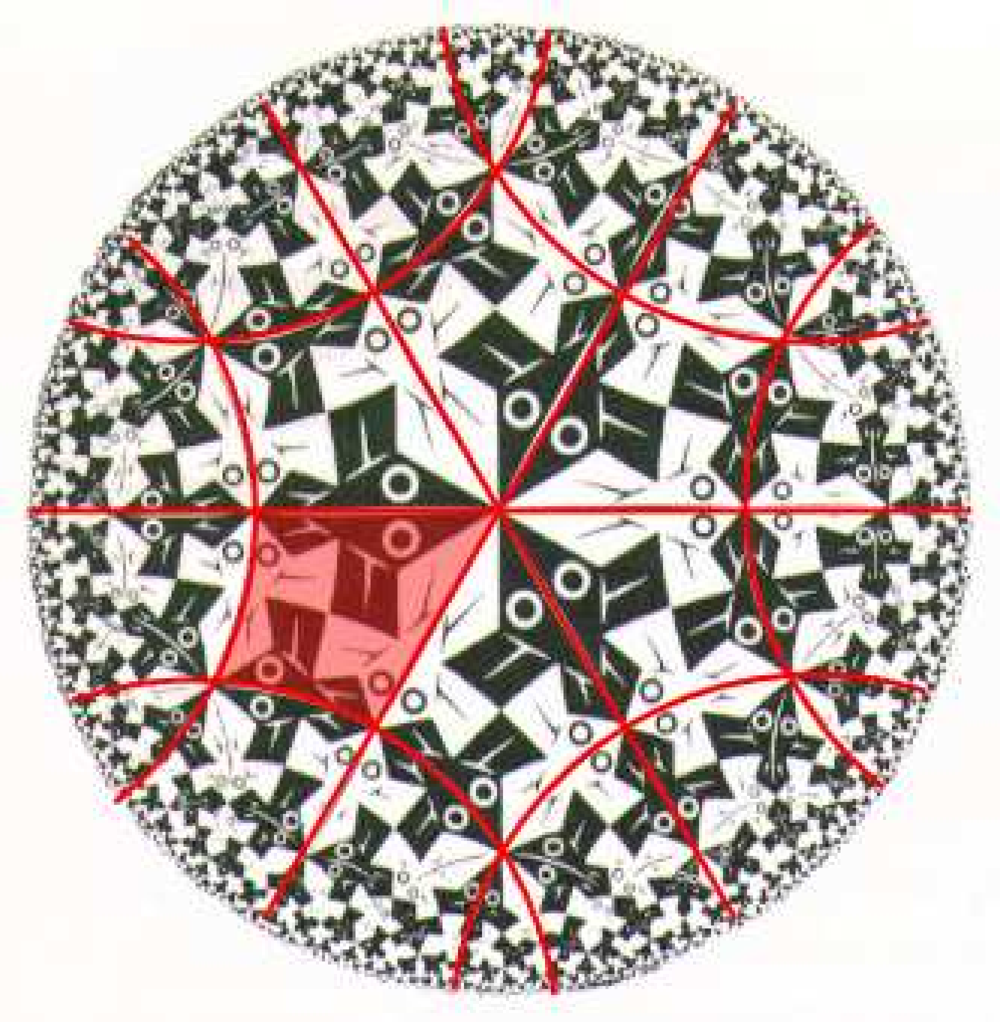
Superfície parametrizada de Breather

Tesselações do disco hiperbólico



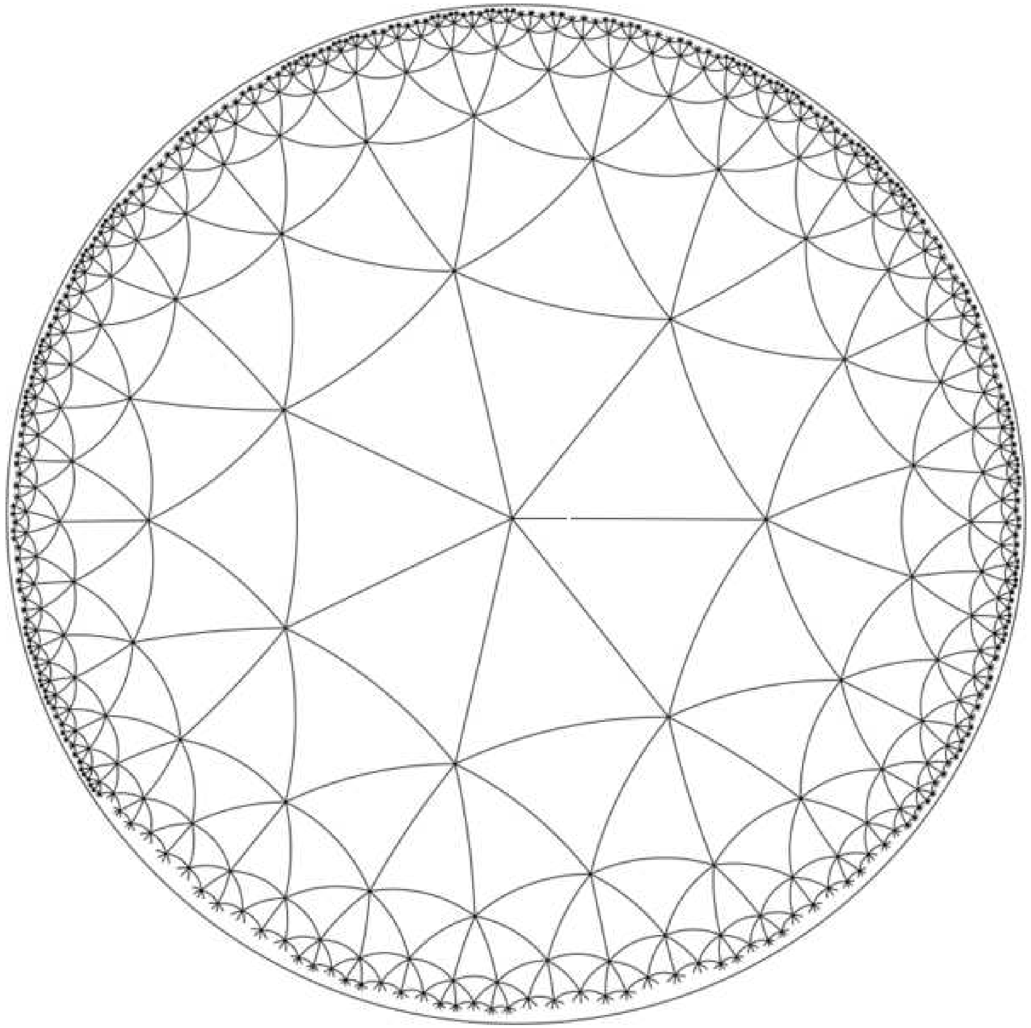
Circle limit IV, *M. Escher*

Tesselações do disco hiperbólico



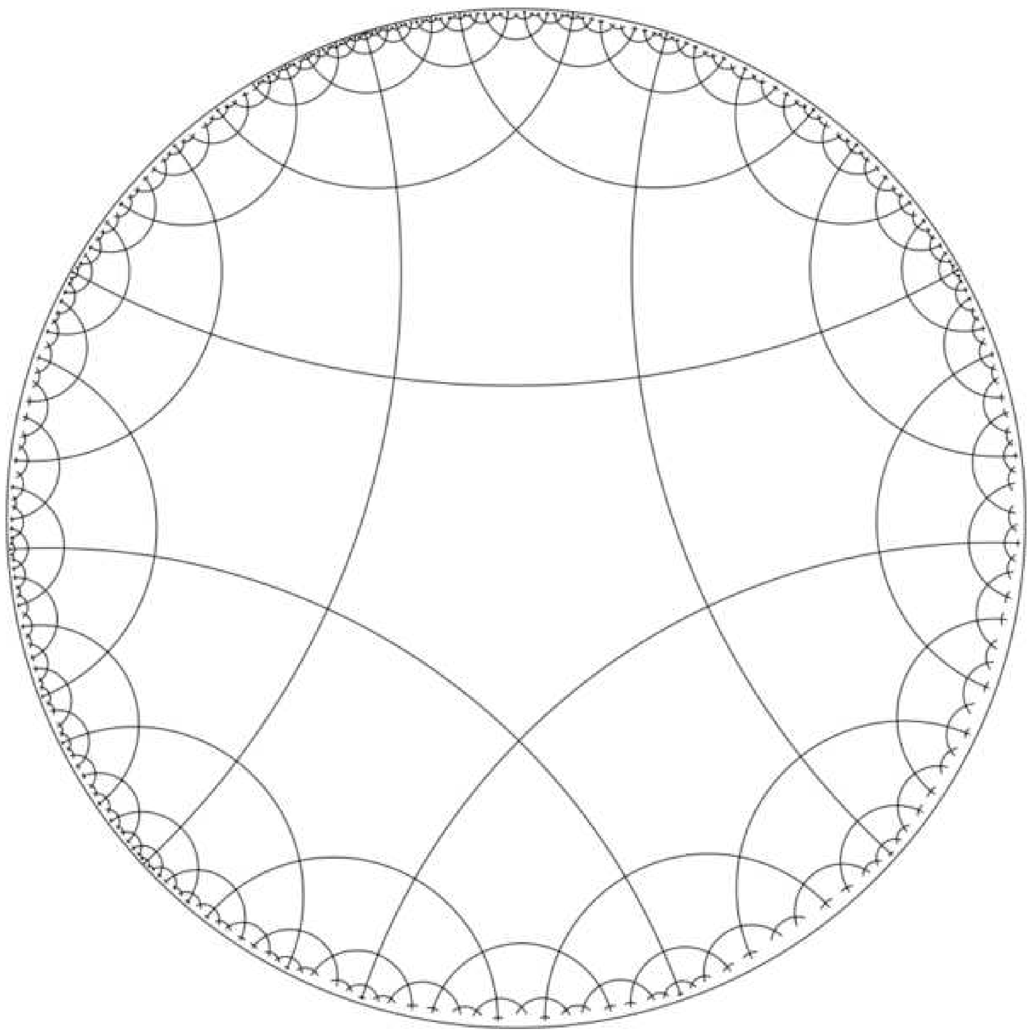
Circle limit I, *M. Escher*

Tesselações do disco hiperbólico



Regular: $\{3, 7\}$

Tesselações do disco hiperbólico



Regular: $\{5,4\}$

Bernhard Riemann (1826–1866)

Bernhard Riemann (1826–1866)

- Aluno de Dirichlet em Berlim, sua *Inaguraldissertation* de 1851 funda juntamente com os trabalhos de Weierstrass a teoria moderna das funções analíticas de uma variável complexa.

Bernhard Riemann (1826–1866)

- Aluno de Dirichlet em Berlim, sua *Inaguraldissertation* de 1851 funda juntamente com os trabalhos de Weierstrass a teoria moderna das funções analíticas de uma variável complexa.
- Em 1853 submete sua *Habilitationsschrift* em Göttingen, juntamente com três propostas para a *Habilitationsvortag* a fim de obter o posto de *Privatdozent* nesse lugar.

Bernhard Riemann (1826–1866)

- Aluno de Dirichlet em Berlim, sua *Inaguraldissertation* de 1851 funda juntamente com os trabalhos de Weierstrass a teoria moderna das funções analíticas de uma variável complexa.
- Em 1853 submete sua *Habilitationsschrift* em Göttingen, juntamente com três propostas para a *Habilitationsvortag* a fim de obter o posto de *Privatdozent* nesse lugar.
- Gauss, que era o chefe do departamento, para a surpresa de Riemann escolhe o terceiro tópico *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde legen*.

Bernhard Riemann (1826–1866)

- Aluno de Dirichlet em Berlim, sua *Inaguraldissertation* de 1851 funda juntamente com os trabalhos de Weierstrass a teoria moderna das funções analíticas de uma variável complexa.
- Em 1853 submete sua *Habilitationsschrift* em Göttingen, juntamente com três propostas para a *Habilitationsvortag* a fim de obter o posto de *Privatdozent* nesse lugar.
- Gauss, que era o chefe do departamento, para a surpresa de Riemann escolhe o terceiro tópico *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde legen*.
- O resultado foi talvez uma das mais importantes conferências científicas jamais proferidas. A publicação póstuma por Dedekind em 1868 repercutiu quase que imediatamente sobre a comunidade de geômetras diferenciais.

O ensaio de Riemann

O ensaio de Riemann

- Riemann introduziu o conceito de *variedade n-dimensional de pontos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que generaliza a idéia de superfície bi-dimensional tanto no sentido de considerar um número maior de dimensões quanto naquele de descartar a necessidade de um espaço circundante.

O ensaio de Riemann

- Riemann introduziu o conceito de *variedade n-dimensional de pontos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que generaliza a idéia de superfície bi-dimensional tanto no sentido de considerar um número maior de dimensões quanto naquele de descartar a necessidade de um espaço circundante.
- Em seguida introduziu uma forma diferencial quadrática (hoje conhecida como *métrica Riemanniana*) $g = \sum_{i<j} g_{ij}\, dx_i dx_j$ que generaliza a primeira forma fundamental das superfícies e que define as distâncias sobre a variedade.

O ensaio de Riemann

- Riemann introduziu o conceito de *variedade n-dimensional de pontos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que generaliza a idéia de superfície bi-dimensional tanto no sentido de considerar um número maior de dimensões quanto naquele de descartar a necessidade de um espaço circundante.
- Em seguida introduziu uma forma diferencial quadrática (hoje conhecida como *métrica Riemanniana*) $g = \sum_{i<j} g_{ij}\, dx_i dx_j$ que generaliza a primeira forma fundamental das superfícies e que define as distâncias sobre a variedade.
- Esse é um dos pontos essenciais de sua visão: a separação entre os conceitos de conjunto de pontos (a variedade) e as possíveis métricas que podem ser definidas sobre ela. Assim, aprofundou brutalmente o conceito de geometria intrínseca de Gauss.

O ensaio de Riemann

- Riemann introduziu o conceito de *variedade n-dimensional de pontos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que generaliza a idéia de superfície bi-dimensional tanto no sentido de considerar um número maior de dimensões quanto naquele de descartar a necessidade de um espaço circundante.
- Em seguida introduziu uma forma diferencial quadrática (hoje conhecida como *métrica Riemanniana*) $g = \sum_{i<j} g_{ij}\, dx_i dx_j$ que generaliza a primeira forma fundamental das superfícies e que define as distâncias sobre a variedade.
- Esse é um dos pontos essenciais de sua visão: a separação entre os conceitos de conjunto de pontos (a variedade) e as possíveis métricas que podem ser definidas sobre ela. Assim, aprofundou brutalmente o conceito de geometria intrínseca de Gauss.
- Ainda introduziu a *curvatura Riemanniana* (que generaliza a curvatura Gaussiana) e estudou o caso de métricas de curvatura constante.

O ensaio de Riemann

- Riemann introduziu o conceito de *variedade n-dimensional de pontos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que generaliza a idéia de superfície bi-dimensional tanto no sentido de considerar um número maior de dimensões quanto naquele de descartar a necessidade de um espaço circundante.
- Em seguida introduziu uma forma diferencial quadrática (hoje conhecida como *métrica Riemanniana*) $g = \sum_{i<j} g_{ij}\, dx_i dx_j$ que generaliza a primeira forma fundamental das superfícies e que define as distâncias sobre a variedade.
- Esse é um dos pontos essenciais de sua visão: a separação entre os conceitos de conjunto de pontos (a variedade) e as possíveis métricas que podem ser definidas sobre ela. Assim, aprofundou brutalmente o conceito de geometria intrínseca de Gauss.
- Ainda introduziu a *curvatura Riemanniana* (que generaliza a curvatura Gaussiana) e estudou o caso de métricas de curvatura constante.
- Esse trabalho não apenas unificou a geometrias Euclideana e não-Euclideana, como representou uma vasta generalização dessas geometrias.

A influência de Riemann

A influência de Riemann

- Por volta de 1869, Rudolf Lipschitz e Elwin Christoffel independentemente estudaram o problema de equivalência de duas métricas Riemannianas. Christoffel introduz os chamados *símbolos de Christoffel* e dá uma condição necessária em termos do que hoje chamamos de coeficientes do tensor de curvatura.

A influência de Riemann

- Por volta de 1869, Rudolf Lipschitz e Elwin Christoffel independentemente estudaram o problema de equivalência de duas métricas Riemannianas. Christoffel introduz os chamados *símbolos de Christoffel* e dá uma condição necessária em termos do que hoje chamamos de coefficientes do tensor de curvatura.
- No final do séc. XIX, a teoria de superfícies já estava bem estabelecida. São de 1887–1896 e 1893 resp. os clássicos tratados *Leçons sur la théorie générale de surfaces* de Gaston Darboux e *Lezioni di geometria differenziale* de Luigi Bianchi. Por outro lado, o trabalho de Riemann despertou considerável interesse em variedades Riemanninas de dimensão arbitrária e curvatura constante. O problema de classificação (local), proposto por Wilhelm Killing em seu livro de 1893, ficou conhecido como *problema de Clifford-Klein* pelas contribuições desse dois matemáticos ao assunto.

A influência de Riemann

- Por volta de 1869, Rudolf Lipschitz e Elwin Christoffel independentemente estudaram o problema de equivalência de duas métricas Riemannianas. Christoffel introduz os chamados *símbolos de Christoffel* e dá uma condição necessária em termos do que hoje chamamos de coeficientes do tensor de curvatura.
- No final do séc. XIX, a teoria de superfícies já estava bem estabelecida. São de 1887–1896 e 1893 resp. os clássicos tratados *Leçons sur la théorie générale de surfaces* de Gaston Darboux e *Lezioni di geometria differenziale* de Luigi Bianchi. Por outro lado, o trabalho de Riemann despertou considerável interesse em variedades Riemanninas de dimensão arbitrária e curvatura constante. O problema de classificação (local), proposto por Wilhelm Killing em seu livro de 1893, ficou conhecido como *problema de Clifford-Klein* pelas contribuições desse dois matemáticos ao assunto.
- Em um desenvolvimento paralelo, o *Erlanger Programm* de Felix Klein de 1872 sintetizava uma geometria como sendo o estudo das propriedades do espaço que são invariantes por um grupo de transformações dado. O norueguês Sophus Lie, inspirado pela teoria de Galois e por conversações com Klein, criou a teoria geral dos grupos contínuos de transformações (hoje conhecidos como *grupos de Lie*) em 1885-6.

A influência de Riemann

A influência de Riemann

- Em 1884, Gregorio Ricci-Curbastro reformulou as idéias de Christoffel e criou o *cálculo tensorial*, que foi subsequentemente aprimorado em conjunto com seu aluno Tulio Levi-Cività em 1901, e que permitia desenvolver o cálculo diferencial em variedades independentemente de coordenadas.

A influência de Riemann

- Em 1884, Gregorio Ricci-Curbastro reformulou as idéias de Christoffel e criou o *cálculo tensorial*, que foi subsequentemente aprimorado em conjunto com seu aluno Tulio Levi-Cività em 1901, e que permitia desenvolver o cálculo diferencial em variedades independentemente de coordenadas.
- As pesquisas de Riemann também influenciaram questões de filosofia do espaço físico. Em 1873, William Clifford formulou um programa de geometrização da física em que ele admitia a possibilidade de que pequenas variações de curvatura, dependentes do tempo, podem ocorrer de ponto para ponto no nosso espaço causar efeitos que nós atribuímos a causas físicas.

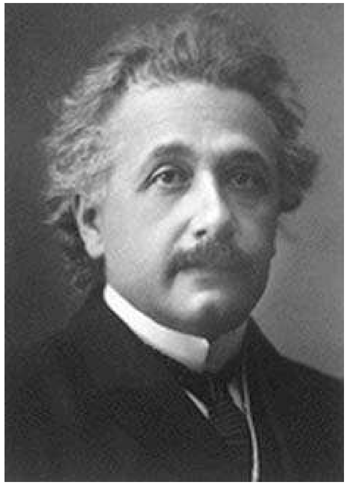
A influência de Riemann

- Em 1884, Gregorio Ricci-Curbastro reformulou as idéias de Christoffel e criou o *cálculo tensorial*, que foi subsequentemente aprimorado em conjunto com seu aluno Tulio Levi-Cività em 1901, e que permitia desenvolver o cálculo diferencial em variedades independentemente de coordenadas.
- As pesquisas de Riemann também influenciaram questões de filosofia do espaço físico. Em 1873, William Clifford formulou um programa de geometrização da física em que ele admitia a possibilidade de que pequenas variações de curvatura, dependentes do tempo, podem ocorrer de ponto para ponto no nosso espaço causar efeitos que nós atribuímos a causas físicas.
- A possibilidade de uma verificação experimental da geometria do espaço físico considerada do ponto de vista da física foi muito debatida entre o final do séc. XIX e o início do séc. XX, tanto do ponto de vista filosófico como científico (Helmholtz, Mach, Poincaré, Einstein).

A relação com a física

A relação com a física

- A apresentação da teoria geral da relatividade foi iniciada por Albert Einstein (1879–1955) juntamente com o matemático alemão Marcel Grossmann (1878–1936) em *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitaion* (1913) e concluída com *Grundlagen der algemeinen Relativitätstheorie* (1916), artigos em que foram usados o cálculo tensorial de Ricci e Levi-Cività. O mais importante elemento dessa teoria é a interpretação geométrica da gravidade: a densidade da matéria numa certa região, e portanto a intensidade do campo gravitacional é proporcional à curvatura do espaço-tempo na métrica pseudo-Riemanniana.



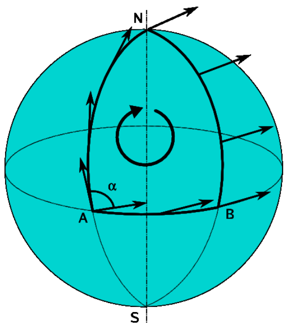
Einstein

A relação com a física

- A apresentação da teoria geral da relatividade foi iniciada por Albert Einstein (1879–1955) juntamente com o matemático alemão Marcel Grossmann (1878–1936) em *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitaion* (1913) e concluída com *Grundlagen der algemeinen Relativitätstheorie* (1916), artigos em que foram usados o cálculo tensorial de Ricci e Levi-Cività. O mais importante elemento dessa teoria é a interpretação geométrica da gravidade: a densidade da matéria numa certa região, e portanto a intensidade do campo gravitacional é proporcional à curvatura do espaço-tempo na métrica pseudo-Riemanniana.
- Esse interesse ampliado em geometria advindo da teoria da relatividade levou mais tarde Levi-Cività a descobrir o importante conceito de *transporte paralelo de vetores* (1917).

A relação com a física

- A apresentação da teoria geral da relatividade foi iniciada por Albert Einstein (1879–1955) juntamente com o matemático alemão Marcel Grossmann (1878–1936) em *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitaion* (1913) e concluída com *Grundlagen der algemeinen Relativitätstheorie* (1916), artigos em que foram usados o cálculo tensorial de Ricci e Levi-Cività. O mais importante elemento dessa teoria é a interpretação geométrica da gravidade: a densidade da matéria numa certa região, e portanto a intensidade do campo gravitacional é proporcional à curvatura do espaço-tempo na métrica pseudo-Riemanniana.
- Esse interesse ampliado em geometria advindo da teoria da relatividade levou mais tarde Levi-Cività a descobrir o importante conceito de *transporte paralelo de vetores* (1917).



Levi-Cività

A relação com a física

- A apresentação da teoria geral da relatividade foi iniciada por Albert Einstein (1879–1955) juntamente com o matemático alemão Marcel Grossmann (1878–1936) em *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitaion* (1913) e concluída com *Grundlagen der algemeinen Relativitätstheorie* (1916), artigos em que foram usados o cálculo tensorial de Ricci e Levi-Cività. O mais importante elemento dessa teoria é a interpretação geométrica da gravidade: a densidade da matéria numa certa região, e portanto a intensidade do campo gravitacional é proporcional à curvatura do espaço-tempo na métrica pseudo-Riemanniana.
- Esse interesse ampliado em geometria advindo da teoria da relatividade levou mais tarde Levi-Cività a descobrir o importante conceito de *transporte paralelo de vetores* (1917).
- Por sua vez, as tentativas de unificar-se as teorias dos campos gravitacional e eletromagnético incentivaram o desenvolvimento do conceito de *conexões em espaços fibrados* através dos sucessivos esforços de Weyl (1918), Schouten (1922), Cartan (1923) e Ehresmann (1950).

A relação com a topologia

A relação com a topologia

- As variedades introduzidas por Riemann e os grupos introduzidos por Lie, assim como outros espaços considerados pelos geômetras até o início do séc. XX tinham em geral um carácter local — estavam definidos apenas no domínio de um sistema de coordenadas — a exceção de poucos bem conhecidos exemplos globais.

A relação com a topologia

- As variedades introduzidas por Riemann e os grupos introduzidos por Lie, assim como outros espaços considerados pelos geômetras até o início do séc. XX tinham em geral um carácter local — estavam definidos apenas no domínio de um sistema de coordenadas — a exceção de poucos bem conhecidos exemplos globais.
- Considerações globais lentamente começam a aparecer em geometria, por exemplo com as *superfícies de Riemann* em análise complexa (1857) e o estudo da topologia de variedades tri-dimensionais de Henri Poincaré (1895).

A relação com a topologia

- As variedades introduzidas por Riemann e os grupos introduzidos por Lie, assim como outros espaços considerados pelos geômetras até o início do séc. XX tinham em geral um carácter local — estavam definidos apenas no domínio de um sistema de coordenadas — a exceção de poucos bem conhecidos exemplos globais.
- Considerações globais lentamente começam a aparecer em geometria, por exemplo com as *superfícies de Riemann* em análise complexa (1857) e o estudo da topologia de variedades tri-dimensionais de Henri Poincaré (1895).
- O crescente interesse dos matemáticos pela nascente área da topologia repercutiu entre os geômetras. Em 1912, Hermann Weyl desenvolveu mais a idéia de superficie de Riemann, e em 1924 o mesmo Weyl reconheceu a importância dos métodos topológicos na teoria dos grupos de Lie e assim inaugurou o ponto de vista global nessa teoria.

A relação com a topologia

- As variedades introduzidas por Riemann e os grupos introduzidos por Lie, assim como outros espaços considerados pelos geômetras até o início do séc. XX tinham em geral um carácter local — estavam definidos apenas no domínio de um sistema de coordenadas — a exceção de poucos bem conhecidos exemplos globais.
- Considerações globais lentamente começam a aparecer em geometria, por exemplo com as *superfícies de Riemann* em análise complexa (1857) e o estudo da topologia de variedades tri-dimensionais de Henri Poincaré (1895).
- O crescente interesse dos matemáticos pela nascente área da topologia repercutiu entre os geômetras. Em 1912, Hermann Weyl desenvolveu mais a idéia de superficie de Riemann, e em 1924 o mesmo Weyl reconheceu a importância dos métodos topológicos na teoria dos grupos de Lie e assim inaugurou o ponto de vista global nessa teoria.
- O conceito de variedade diferenciável global amadureceu até atingir seu formato definitivo com os trabalhos de O. Veblen e J. H. C. Whitehead (1933) e H. Whitney (1936).

A idéia de geometria global

A idéia de geometria global

- Como conseqüência da evolução do conceito de variedade difereciável, antigos problemas em geometria foram revistos sob o novo ponto de vista global e novos problemas surgiram.

A idéia de geometria global

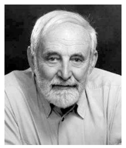
- Como conseqüência da evolução do conceito de variedade difereciável, antigos problemas em geometria foram revistos sob o novo ponto de vista global e novos problemas surgiram.
- S. Cohn-Vossen, W. Blaschke, S. S. Chern e outros estudaram as propriedades globais relacionando os invariantes Riemannianos com a topologia das variedades. H. Poincaré, G. Birkhoff, M. Morse, J. Hadamard e E. Hopf estudaram várias propriedades de geodésicas de diversos pontos de vistas diferentes. H. Hopf estudou as propriedades globais dos espaços de curvatura constante, e É. Cartan definiu e investigou exaustivamente os espaços simétricos, uma classe notável de variedades Riemannianas.

A idéia de geometria global

- Como conseqüência da evolução do conceito de variedade diferenciável, antigos problemas em geometria foram revistos sob o novo ponto de vista global e novos problemas surgiram.
- S. Cohn-Vossen, W. Blaschke, S. S. Chern e outros estudaram as propriedades globais relacionando os invariantes Riemannianos com a topologia das variedades. H. Poincaré, G. Birkhoff, M. Morse, J. Hadamard e E. Hopf estudaram várias propriedades de geodésicas de diversos pontos de vistas diferentes. H. Hopf estudou as propriedades globais dos espaços de curvatura constante, e É. Cartan definiu e investigou exaustivamente os espaços simétricos, uma classe notável de variedades Riemannianas.
- Através desse esforço monumental, a geometria Riemanniana foi ligada a diversas áreas de matemática, e foi reconhecido que a relação entre as propriedades locais determinadas pelas métricas Riemannianas (e.g. curvatura) e as propriedades globais relacionadas com a estrutura global da variedade (e.g. invariantes topológicos) são importantes objetos de investigação (e.g. teorema de Gauss-Bonnet generalizado). Através da noção de *completude* introduzida por H. Hopf e W. Rinow (1931), as noções globais foram firmemente estabelecidas.

Desenvolvimentos recentes

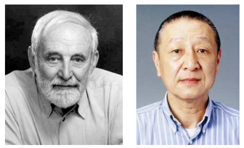
Desenvolvimentos recentes




Bott e Hsiang

- Ações isométricas de grupos de Lie (Bott, Hsiang).

Desenvolvimentos recentes

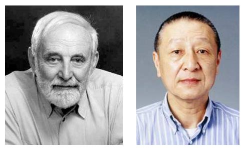


Bott e Hsiang

Klingenberg, Gromov, Perelman e Donaldson

- Ações isométricas de grupos de Lie (Bott, Hsiang).
- O teorema da esfera (Rauch, Berger, Toponogov, Klingenberg), métodos de comparação (Cheeger) e geometria métrica (Gromov).

Desenvolvimentos recentes

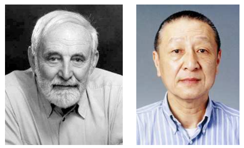


Bott e Hsiang

Klingenberg, Gromov, Perelman e Donaldson

- Ações isométricas de grupos de Lie (Bott, Hsiang).
- O teorema da esfera (Rauch, Berger, Toponogov, Klingenberg), métodos de comparação (Cheeger) e geometria métrica (Gromov).
- Topologia de variedades de dimensão 3 (Hamilton, Perelman e a conjectura de Poincaré) e 4 (Freedman), e invariantes diferenciais de variedades de dimensão 4 (Donaldson, Seiberg-Witten).

Desenvolvimentos recentes



Bott e Hsiang

Klingenberg, Gromov, Perelman e Donaldson

Witten

- Ações isométricas de grupos de Lie (Bott, Hsiang).
- O teorema da esfera (Rauch, Berger, Toponogov, Klingenberg), métodos de comparação (Cheeger) e geometria métrica (Gromov).
- Topologia de variedades de dimensão 3 (Hamilton, Perelman e a conjectura de Poincaré) e 4 (Freedman), e invariantes diferenciais de variedades de dimensão 4 (Donaldson, Seiberg-Witten).
- Teoria (superssimétrica) de cordas e simetria especular (Calabi-Yau, Witten).

Final

(...) il voler tratar le quistioni naturali senza geometria è un tentar di fare quello che è impossibile ad esser fatto.

(G. Galilei, *Dialogo*, giornata seconda (1632))