MAT122 e MAT2116 – Álgebra Linear
Lista de Exercícios 6 – 01/05/2008

PROF. CLAUDIO GORODSKI

1. Use a desigualdade de Schwarz para mostrar a *desiguladade triangular* $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ para vetores x, y em um espaço vetorial V.

2. Qual é o múltiplo de $a = (1,1,1)$ mais próximo de $b = (2,4,4)$. Qual é o múltiplo de b mais próximo de a?

3. A molécula de metano CH_4 está arranjada de modo que o átomo de carbono está no centro de um tetraedro regular com um átomo de hidrogênio em cada vértice. Se os vértices estão localizados em $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$, (note que tal tetraedro é regular de aresta $\sqrt{2}$) qual é o cosseno do ângulo entre raios unindo o centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a dois dos vértices? Use uma calculadora eletrônica para obter um valor aproximado para esse ângulo.

4. Calcular a matriz que projeta ortogonalmente o $\mathbf{R}^2$ sobre a reta $x + 2y = 0$.

5.

a. Calcular a matriz P_1 que projeta o $\mathbf{R}^2$ sobre a reta por $a = (1,3)$ e também a matriz P_2 que projeta sobre a reta perpendicular a a.

b. Calcular $P_1 + P_2$ e P_1P_2 e interpretar o resultado.

6. Calcular a solução aproximada de $3x = 10$, $4x = 5$ pelo método dos mínimos quadrados.

7. Resolver $Ax = b$ pelo método dos mínimos quadrados e calcular $p = A\bar{x}$ se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. Escrever a equação da melhor reta $b = x_1 + x_2t$ (mínimos quadrados) para as medidas

t	b
-2	4
-1	3
0	1
2	0

.

9. Calcular a matriz da projeção do $\mathbf{R}^3$ sobre o plano gerado por $a_1 = (1,0,1)$ e $a_2 = (1,1,-1)$.

10. Se P é a projeção do $\mathbf{R}^n$ sobre um subespaço S de dimensão k, quais são o espaço-coluna e o posto de P?

11. Seja V o subespaço de $\mathbf{R}^4$ gerado por $(1,1,0,1)$ e $(0,0,1,0)$. Calcular:

a. Uma base para o complemento ortogonal $V^\perp$.

b. A matriz da projeção P sobre V.

c. O vetor de V mais próximo de $b = (0,1,0,-1)$.

12. Projetar $b = (0, 3, 0)$ sobre cada um dos vetores ortonormais $a_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ e $a_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ e então determinar a sua projeção p sobre o plano gerado por a_1 e a_2.

13. Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

14. Aplique o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt a

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

escreva o resultado na forma $A = QR$.

15. Idem para

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16. Calcular uma base ortonormal para o subespaço gerado por $a_1 = (1, -1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, -1, 0)$ e $a_3 = (0, 0, 1, -1)$.

17. Calcular uma base ortonormal $\{q_1, q_2, q_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ tal que $\{q_1, q_2\}$ gera o espaço-coluna de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Que espaço fundamental de A contém q_3? Qual é a solução por mínimos quadrados de $Ax = b$ onde $b = (1\ 2\ 7)^t$?