MAT122 e MAT2116 – Álgebra Linear
Lista de Exercícios 7 – 10/05/2008

Prof. Claudio Gorodski

1. Se A é uma matriz n por n, qual é a relação entre $\det A$ e:

   a. $\det(2A)$;

   b. $\det(-A)$;

   c. $\det(A^2)$.

2. Calcular o determinante de:

   a. a matriz de posto um $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

   b. a matriz triangular superior $U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

   c. a matriz triangular inferior U^t;

   d. a matriz inversa U^{-1};

   e. a matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Se Q é uma matriz ortogonal, qual é o valor de $\det Q$?

4. Mostre que $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

5. Decida a veracidade das seguintes afirmações:

   a. O determinante de uma matriz é o produto de seus pivôs.

   b. Se A é invertível e B é singular, então $A + B$ é invertível.

   c. Se A é invertível e B é singular, então AB é singular.

   d. Se a soma dos elementos de cada linha de A é zero, então $\det A = 0$.

   e. Uma matriz cujos coeficientes são todos 0 ou 1 tem determinante 0, 1 ou -1.

   f. $\det(A + B) = \det A + \det B$.

6. Mostre que se $A = -A^t$ e A tem ordem ímpar, então $\det A = 0$.

7. Calcular o determinante por eliminação de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}.$$

8. Calcular o determinante usando a fórmula da soma alternada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Seja A_n a matriz n por n com 1 nas três diagonais principais e 0 nas outras posições:

$$A_1 = (1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Seja $D_n = \det A_n$.

a. Use a expansão de Laplace ao longo da primeira linha de A_n para mostrar que $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$ para $n \geq 3$.

b. Calcular D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8 e D_{1000}.

10. Explique por que a matriz 5 por 5 tem determinante zero:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

11. Use a fórmula dos cofatores para verificar que A^{-1} é triangular superior se A for triangular superior e invertível.

12. Calcular o volume do paralelepípedo em $\mathbf{R}^3$ que tem quatro de seus vértices em:

a. $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$;

b. $(0,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,1)$, $(0,2,1)$.

13. Resolver pela regra de Cramer:

a. $3x_1 + 2x_2 = 7$, $4x_1 + 3x_2 = 11$.

b. $ax + by = 1$, $cx + dy = 0$.