MAT139 – Álgebra Linear para Computação
Lista de Exercícios 4 – 30/08/2011

Prof. Claudio Gorodski

1. Descreva $\operatorname{im} A$, $\ker A$, $\operatorname{im} A^t$ e $\ker A^t$ no caso em que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Se o produto de duas matrizes é a matriz nula, $AB = 0$, mostre que $\operatorname{im} B \subset \ker A$.

3. Suponha que A é uma matriz m por n de posto r. Sob que condições sobre esses números temos que:

a. $Ax = b$ tem infinitas soluções em x para qualquer b dado?

b. $Ax = b$ tem exatamente uma solução em x para qualquer b dado?

c. Existem vetores b para os quais $Ax = b$ não tem soluções?

d. A tem uma inversa bi-lateral: existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$?

e. A tem uma inversa à esquerda: existe B tal que $BA = I$?

f. A tem uma inversa à direita: existe C tal que $AC = I$?

4. Existe uma matriz A tal que $(1\ 1\ 1)^t$ pertence a $\operatorname{im} A^t \cap \ker A$?

5. Suponha que a única solução de $Ax = 0$ (m equações em n incógnitas) é a trivial, $x = 0$. Qual é então o posto de A? Por quê?

6. Determinar uma matriz 1 por 3 cujo núcleo consista dos vetores de $\mathbf{R}^3$ satisfazendo $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$.

7. Calcular uma inversa à esquerda ou uma inversa à direita, se elas existirem, para as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

8. Se V é o subespaço de $\mathbf{R}^3$ gerado pelos vetores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

exibir matrizes A e B tais que V é o espaço das linhas de A e é o núcleo de B.

9. Exiba uma matriz com as propriedades listadas ou explique por que tal matriz não pode existir:

a. Espaço das colunas contém $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e espaço das linhas contém $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Espaço das colunas tem como base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e núcleo tem como base $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. Espaço das colunas é $\mathbf{R}^4$ e espaço das linhas é $\mathbf{R}^3$.

10. Qual é a curva-imagem do círculo $x^2+y^2=1$ pela transformação linear $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida pela matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

11. Escrever a matriz 3 por 3 que representa as transformação do $\mathbf{R}^3$ que:

a. projeta todo vetor sobre o plano xy;

b. reflete todo vetor em relação ao plano xy;

c. roda o plano xy de 90 graus e deixa o eixo z fixo.

12. Escreva a matriz A 4 por 4 que representa uma permutação cíclica: (x_1, x_2, x_3, x_4) é transformado em (x_2, x_3, x_4, x_1). Verifique diretamente que $A^3 = A^{-1}$.

13. Escreva uma matriz A 4 por 3 que representa o "right shift": cada vetor (x_1, x_2, x_3) é transformado em $(0, x_1, x_2, x_3)$. Exiba também uma matriz B 3 por 4 para o "left shift" que leva (x_1, x_2, x_3, x_4) em (x_2, x_3, x_4). Como são as matrizes AB e BA?

14. Seja $V = \mathcal{P}_3$ o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo 3 mais o vetor nulo. Seja W o subespaço de V formado pelos vetores p satisfazando $\int_0^1 p(x)dx = 0$. Verifique que W é um subespaço de V e calcule uma base e a dimensão de W.

15. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo n mais o vetor nulo. Representar as seguintes transformações lineares por matrizes em relação à base canônicas dos espaçoes em questão:

a. $D^2 : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, one D é a derivação de polinômios.

b. $T : \mathcal{P}_3 \to \mathbf{R}$, $T(p(t)) = p(0)$.

c. $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_4$, $T(p(t)) = (1+t)p(t)$.